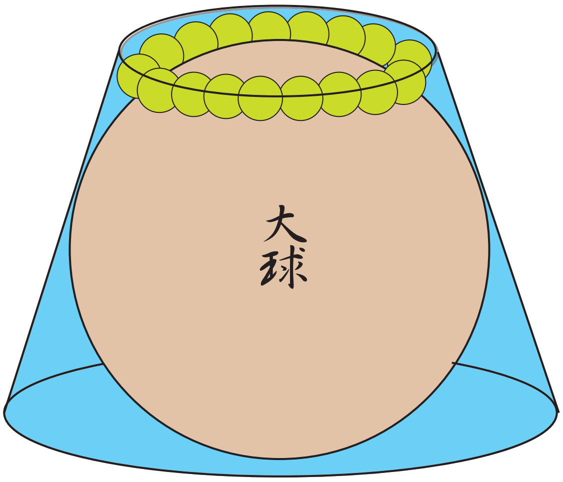
福田・武田の二田論争

小寺　裕



今有如圖円臺内容大球乃切上下径

其上環容小球數個唯云上径若干

問得至少下径術如何

答曰　如左術

術曰置二個開平方内

減一個余名定加三個開

平方以減二個余四之

以除定加五分乗上径

得下径合問

福田嘉當家弟

司天家御直御門人　福田謙之丞惟義謹撰

〔題意〕今図のように円錐台に内接する大球を容れる．その上の隙間に小球を環状に容れる．図は仮に 17 個とする．上底の直径がわかっているとき，下底の直径の最小値を求める術を問う．
術曰 定 $=\sqrt{2}-1$ と置くとき，

$$\text{下径}=\left(\frac{\text{定}}{4(2-\sqrt{\text{定}+3})}+\frac{1}{2}\right)\times\text{上径}$$

〔福田・武田二田の論争〕
福田理軒が大阪天満宮に掲額したこの算題について，理軒の師匠である大阪の和算家・武田眞元は邪題なりとした．これにより福田，武田両氏の間に溝ができ，福田は武田の元を去り，徳島藩士の小出兼政 (修喜) に従う．これを世に〈福田武田二田の争い〉という．

額面に司天家御直とあることから，武田は土御門家に訴えた．福田は正題と反論したため，正邪の判定を小出修喜に依頼した．小出は事の顛末を『浪速天満宮算題奉額評林』(天保 7/1836 年) に書き記しているので，ここではこの書をもとに小出の術解を示すことにする．

武田は上径と下径が等しいとき下径が最小である，とした．これに対して，小出は〈上径と下径が等しいときは小球十五個を容れられるが，連環して付かざる所が出来る (図 1)〉とした．だから小球十六個を容れるときが最小で，福田の術は正しいとした．

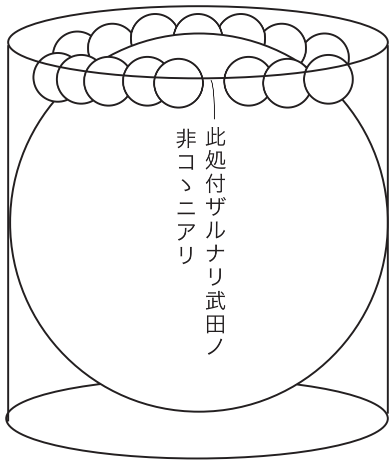
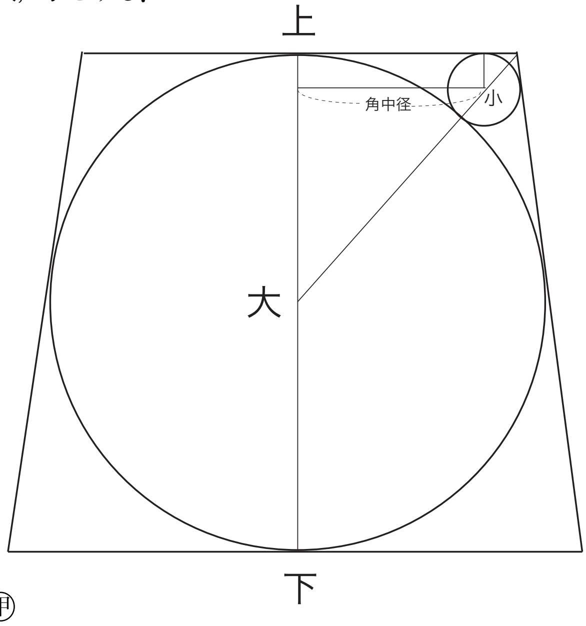


図 1

【術解】上底，下底，大球，小球の直径を各々上，下，大，小とする．

$$\frac{大}{2} : \frac{上}{2} = \left(\frac{大}{2} - \frac{小}{2}\right) : 角中径$$



角中径 $= \sqrt{大小}$ だから

$$上\,(大 - 小) = 2\,大\sqrt{大小}$$

自乗して

$$上^2(大 - 小)^2 = 4\,大^3小$$

$大^2 = 上下$ だから

$$上\,(大 - 小)^2 = 4\,下大小$$

故に，$下 = \dfrac{(大 - 小)^2}{4\,大小}上$

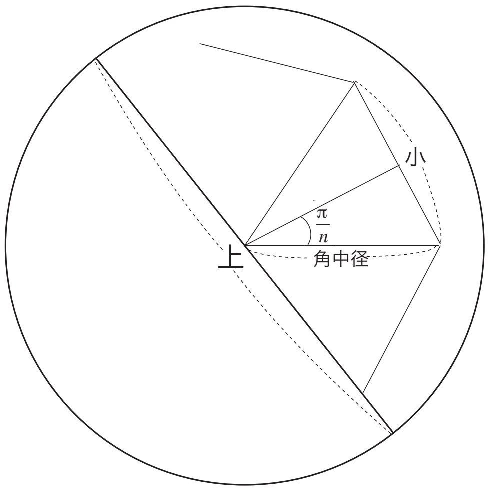
ここで，$小 = 子 \cdot 大$ とすると $下 = \dfrac{(子 - 1)^2}{4\,子}上\ \cdots$ 甲

台形だから $下 \geqq 上$，即ち $\dfrac{(子 - 1)^2}{4\,子}上 \geqq 上$ で $子^2 - 6\,子 + 1 \geqq 0$ となり，$子 \leqq 1$ に注意してこれを解くと $子 \leqq 3 - \sqrt{8}$ となる．武田眞元は $子 = 3 - \sqrt{8}$ のとき下径が最小 (円柱になる) で，小球は 15 個入るといった．それを調べる．

小球の個数を n とすると $子 = 4\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}$ だから

$$\sin\frac{180^\circ}{n} \leqq \frac{\sqrt{3 - \sqrt{8}}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} < \sin 12^\circ$$

$$\therefore \quad n > 15$$



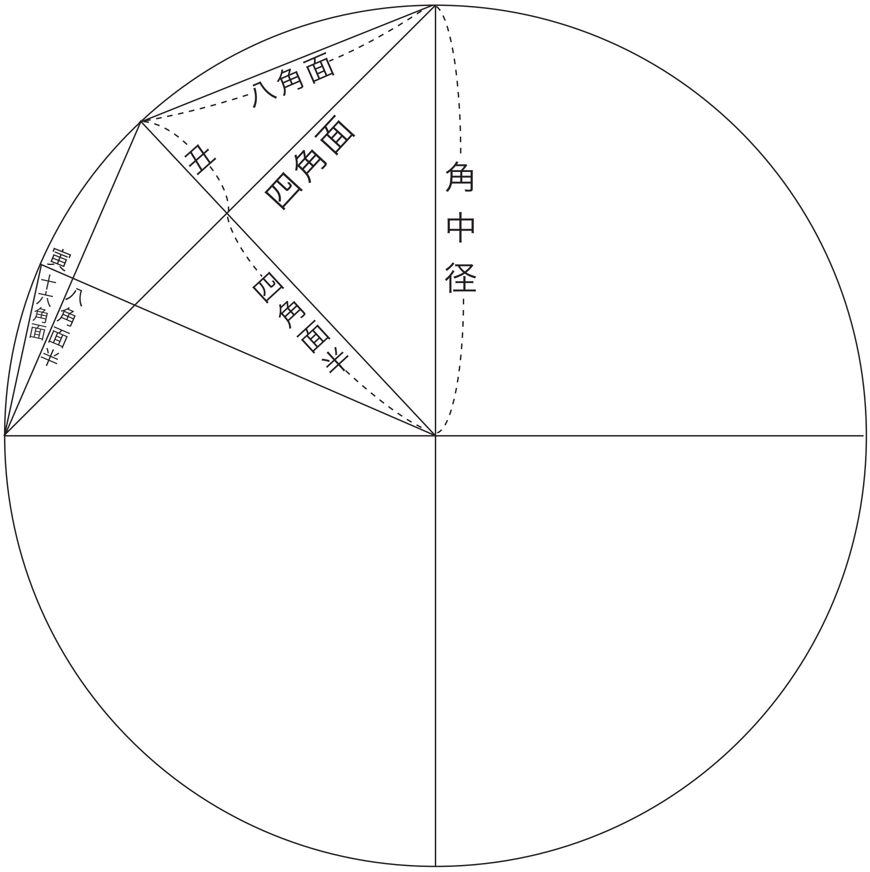
上から見た図

よって，円柱の場合に小球 15 個は容れ得るが間隔があく．
しかし 16 個は容れ得ない．故に，武田の主張は正しくない．
$n = 16$ のときは

$$子 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

となるを 甲 に代入すれば術文の結果になる．

〔角中径を求める術〕角中径は正多角形の外接円の半径のこと．八角面は正八角形の一辺のこと．十六角面 (正十六角形の一辺の長さ) と角中径 (外接円の半径) との関係式を作る．角中径を角と書くことにする．



$四角面 = \sqrt{2}角$

$丑 = 角 - \dfrac{1}{2}四角面 = 角 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}角$ だから $丑^2 = \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)角^2$

$$八角面^2 = 丑^2 + \left(\frac{四角面}{2}\right)^2 = (2 - \sqrt{2})\ 角^2$$

故に $八角面 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}角$

$$寅 = 角 - \sqrt{角^2 - \left(\frac{八角面}{2}\right)^2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right)角$$

$十六角面^2 = 寅 \times 2\ 角$ だから

$$十六角面^2 = \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)角^2$$

本問では $十六角面 = 小$，また $角^2 = 大小$ だから $小 = (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})\ 大$ となり，

$$子 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

と求まる．