ISSN 0386-9555

数学史研究

(通 巻 129 号)

1991 年 4 月～6 月

目　　次

日 本 数 学 史 学 会

論　　説

享保12年伝来の『割円八線之表』をめぐって

小　林　龍　彦

1．問題の所在

筆者は先に小論を発表して，わが国に初めて伝わった割円八線之表（三角関数表又は三角比の表）は，清朝崇禎7（1634）年に完成し進呈された『崇禎暦書』に載る『割円八線之表』であり，これが梅文鼎（1633～1721）の『暦算全書』（雍正元：1723年刊．即ち梅文鼎の死後，孫や弟子によって編纂，刊行されたもの）の一部分のようにして幕府に献上され，そしてこれに著された三角法の諸公式や応用の範囲の広さに驚嘆した建部賢弘や実際に天文測量に応用してみた中根元圭の姿を明らかにした[1]．しかし其の際，『暦算全書』が輸入された翌享保12（1727）年に，『割円八線之表』以外に『割円八線互求法』，『割円句股八線之表』と表題する中国語訳本の輸入があることを指摘しながらも，何故，建部賢弘や中根元圭が8代将軍徳川吉宗への献上本として『割円八線之表』を撰んだのか，その理由について議論する余地を持たなかった．言うまでもなく建部賢弘は関孝和亡き後，関の数学的遺産を継承・発展させた人物であり，また中根元圭も建部の弟子として残した業績は和算史上特筆できるものがある．そのような両者が少なくも安易な考えで『割円八線之表』を選択したとは思えない．とすればそこには何らかの選択基準があったと考えてもおかしくはないであろう．そこでこの小論は上記三本の内容を比較・検討することで，上記疑問を解く糸口とすることにした．

2．『暦算全書』と『割円八線之表』の輸入について

先ず最初に，論旨を分かり易くするために，『暦算全書』と割円八線之表について及び8代将軍徳川吉宗に献上された『新写訳本暦算全書』（宮内庁書陵部蔵）のことを簡単に触れておきたい．

寛永7（1630）年，3代将軍徳川家光のとき禁輸書籍を列記した「御禁書」が布告された[2]．このことは江戸幕府の天主教即ちキリスト教に対する警戒が人物のみならず文物にまで及び，内的には文教統制をも意味していたものといえよう．しかし，寛永7年の禁制から90年の享保5（1720）年，わが国の天文・暦学の研究を確実なものとするために，8代将軍徳川吉宗は“邪教（筆者註：キリスト教のこと）ニ干渉セザル書籍ハ其禁ヲ弛”

めるとした[3]のであった．この漢訳洋書の輸入緩和令の6年後，享保11（1726）年，『兼済堂纂刻梅勿菴先生暦算全書』(以後，断りがないかぎり単に『暦算全書』と呼ぶ。)が長崎に伝わった[4]．これは直ちに，“右写，建部彦次郎江被仰付，中根丈右衛門点付”[5]とする命が下り，建部賢弘と中根元圭による和訳が始められるところとなった．ただし，上記に“中根丈右衛門点付”とあることからも分かるとうり，和訳の総ては中根が担当した．

ところがこの時輸入された『暦算全書』には，その総目には“割円八線之表 一巻 続出”として，割円八線之表は載せられていなかったのである．『暦算全書』の編纂者が，何故割円八線之表を続出としたのか，今，その理由を判断する材料はない．しかし，この書の和訳が終わり，建部賢弘の序文（享保18：1833年正月のこと）とともに『新写訳本暦算全書』として幕府に献上されるに至るや，『新写訳本暦算全書』の総目には続出の文字は消え，そして『割円八線之表　二巻』が組み入れられていたのである．これらは現在，宮内庁書陵部に管理されているが，『割円八線之表　二巻』が後世になって付け加えられたものでないことは，次の記述であきらかである．江戸幕府書物奉行が書き止めた『幕府書物方日記』の享保18年5月16日の項[5]を見ると，

新規御預ケ
○新写暦算全書　四十三冊
同
○同　序　　一冊
同
○新割円八線之表　二冊

とあって，『割円八線之表』は『新写訳本暦算全書』及び『同序』とともに同年5月には幕府御文庫に収蔵されていたことが明瞭にされている[6]．

ところで冒頭で触れたように，享保12年に三種類の八線表の関連本が輸入されたことは確かである．このことは文化元（1804）年，長崎書物改役の向井富が編集した“商舶載来書目”のなかに[7]中国からの多数の舶載書籍に混じって，

享保十二丁未年
一　割円八線之表　一部一套
一　割円八線互求法　一部一套
一　割円句股八線之表　一部一套

などが輸入されたことを伝えており[8]三本の伝来は疑うべき余地はないだろう。そこで改めて問われるのが，これらの書籍を手にしたと思われる建部賢弘や中根元圭の三本にたいする態度である．このことを推測するにあたってまず上記三本の内容を比較してみよう．

3．『割円八線之表』・『割円八線互求法』・『割円句股八線之表』の内容について

現在，『割円八線之表』，『割円八線互求法』，『割円句股八線之表』の三本は日本学士院，京都大学人文科学研究所，東北大学付属図書館などに収蔵されている．そこで筆者は『割円八線之表』については日本学士院蔵の『崇禎暦書』の割円八線之表（蔵書番号6812）[9]と京都大学人文科学研究所収蔵の『西洋新法暦書』（順治元：1644年刊の奏進本）[10]，『割円八線互求法』と『割円句股八線之表』については東北大学付属図書館蔵の林文庫2667[11]及び林集書378[12]を利用し内容の比較・検討を試みた．其の結果は下記の表のようにまとめられる．ただし，表には日本学士院蔵の『崇禎暦書』の割円八線之表と京都大学人文科学研究所収蔵の『西洋新法暦書』が重複するため載せなかった．一方，宮内庁書陵部に収蔵される『割円八線之表』は議論の必要上から取り上げておいた．

『西洋新法暦書』法数部八線表（京都大学人文科学研究所蔵）	『割円八線互求法』徐光啓 校閲（東北大学図書館蔵）	『割円鈎股八線之表』（東北大学図書館蔵）	『割円八線之表』（宮内庁書陵部蔵）
割円八線表用法	三率用法		割円八線表用法
列表法二条	求正弦	用法	列表法二条
表中用線相求法九条	求余弦	列表法二条	表中用線相求法九条
表外用法八条	・	表中用線相求法九条	表外用法八条
八線表全図	・	表外用法八条	八線表全図
割円勾股八線表（0°～	求余矢	八線表全図	（0°～45°迄の表。
45°迄の表。二巻）	句股形両角一辺	八線表（0°～45°	二巻）
増　凡所設之弧過象限…	句股形両辺一角	迄の表。二巻）	増　凡所設之弧過象限…
（90°以上の用法）	句股形両辺挾一角		（90°以上の用法）
八線表代句股開方法	句股形両角挾一辺		八線表代勾股開方法
	鋭角形両辺一角		
	鋭角形両角一辺		
	鋭角形両角挾一辺		
	鋭角形両辺挾一角		
	即前形用分角法		
	鋭角形両角一辺		
	・		
	・		
	隔量水田		
	隔水量弧矢田		

この比較表は対象とした諸本に顕れる項目を列記したものであるが，これからだけでも以下のような相違を指摘することができる．

①『西洋新法暦書』の八線表と宮内庁書陵部に収蔵される『割円八線之表』の内容は全く一致する[13]．『西洋新法暦書』は中国清朝の順治元：1644年に刊行された暦算書で，これが明朝末の崇禎7：1634年，徐光啓等によって編纂された『崇禎暦書』に基づくことは言うまでもない．その『崇禎暦書』は崇禎4年から崇禎7年にかけて5次に分けて明皇帝に進呈されたが，『割円八線之表』は崇禎4年正月の第1次進呈に含まれている．そこには“割円八線表六巻”と記録され[14]，『西洋新法暦書』が二巻とすることと巻数に違いがあるが，筆者は，日本学士院蔵の『崇禎暦書』と『西洋新法暦書』の八線表との内容が全く異なっていないことから，刊本に至る間に内容的修正はなかったものと判断している．

②『割円八線互求法』は徐光啓の校閲によるもので，平面三角法の応用を系統的に述べてはいるが，三角関数表は納められていない．この本の主眼とするところは，平面三角法の豊かな応用例も魅力ではあるが，最後に示される様な複雑に入り組んだ山の高さや井戸の深さ，水田の面積をその前段で述べた三角法を使って如何に測量するかである[15]．

③『西洋新法暦書』の八線表と宮内庁書陵部の『割円八線之表』及び『割円釣股八線之表』の内容を比較すると，勾，釣，句の文字の違いはあるが，最後に付する“増　凡所設之弧…，八線表代句股開方法”を除いて他は全く一致していることが分かる．李子厳著の『中算史論叢』によれば，当時中国に『割円句股八線表，付代句股開方法』（一巻，湯若望撰，新法暦書本）とする一本が存在していたことを明らかにしているが[16]，『割円釣股八線之表』と題する三角法の算書は確認されていない．

ところが，『西洋新法暦書』の版心を見ると第一丁から八線表全図までは“割円八線表用法”と表しているが，三角関数表に至や何ら断りもなく“割円勾股八線表”とし，三角関数表が終ると，“八線表代句股開方法”としてある．享保12：1727年の段階ではまだ『西洋新法暦書』は出版されていないので，この年に輸入された『割円句股八線之表』とは『崇禎暦書』の“八線表代句股開方法”の部分を外した写本ではないかと推測できる．勿論，宮内庁書陵部に収蔵される『割円八線之表』に版心は付いていない．しかし，上記の表に示すようにこれが『割円句股八線之表』でないことは明らかである．

4．まとめ

前章で明らかにできたことから，建部賢弘や中根元圭が将軍徳川吉宗に『暦算全書』の和訳本を献上するにあたって，『崇禎暦書』の“割円八線之表”を挿入することとした理由を以下のように指摘できまいか．まず実際に平面三角法や球面三角法を利用するにあって三角関数表は必要不可欠である．建部賢弘や中根元圭はこのことを『暦算全書』の学習を通じて直ちに理解できた．そこで三本を比較したとき，徐光啓校閲の『割円八線互求法』には三角関数表は無いから，『暦算全書』に掲載されていない『割円八線之表』を補充するという趣旨からして即座に対象外になったであろう．残る二本を検討すると，両者は最後に付く“八線表代句股開方法”を除いて全くの同一内容であることが直ちに分かる．その“八線表代句股開方法”では，半径の数値に係わらず三角比を使えば句，股，弦が容易に求められることを述べている．即ち句股弦の定理を用いるよりも簡便であることを主張している．おそらくこの部分は徐光啓らが伝統に固守する算家に三角法の有用性を悟らせるために付け足したものと思われる．建部たちも著者の意図するところが理解できたであろう．つまり最後に載せられて付録3題が採否の決め手となったのではないだろうか．と同時にこの『割円八線之表』が，梅文鼎がしばしばその著書『暦算全書』の中で述べ使う所の“割円八線表”だと判断したと思われる．

なお，この小論は1990年9月に開かれた群馬県和算研究会総会（於前橋市立工業短期大学）の席上で発表した原稿に加筆修正をしたものである．

註

(1) 拙著：「『暦算全書』の三角法と『崇禎暦書』の割円八線之表の伝来について」，『科学史研究』，第Ⅱ期第29巻，№174，1990年，pp.83～92.

(2)『近藤正斎全集』，国書刊行会出版，第3巻，明治39年，p.146.

(3)『近藤正斎全集』，国書刊行会出版，第3巻，明治39年，pp.215～218.

(4) 但し宮内庁書陵部に収蔵される『新写訳本暦算全書』は雍正2（1724）年としている．

(5)『幕府書物方日記』，東京大学出版会，「大日本近世史料」，1974年，p.44.

(6)『幕府書物方日記』にはこれら三書が時の有力者に貸し出されたことを記録している．例えば同書15巻のp.210を見よ．

(7) 大庭脩：『江戸時代における唐船持渡書の研究』，関西大学東西学術研究所，昭和42年，p.679.

(8) また同書は，享保12年には（p.663），

一　八線表　一部一套

一　八線互求法　一部一套

享保18年には（p.736），

一　西洋暦経　一部十二套

宝暦7年には（p.736），

西洋新法暦書　一部

宝暦9年には（p.690），

一　崇禎暦書　一部一套

などが伝えられたことを記してある．

(9)　また同院蔵の6159も同じ割円八線之表である．

(10)　京都大学人文科学研究所編：『京都大学人文科学研究所漢籍目録』，同朋舎，昭和56年，pp.342～343.

(11)　平山諦編：『東北大学林文庫目録』，1972年，自家版．

(12)　『東北大学林集書』，昭和39年，自家版．また，林集書918の『八線互求法　崇禎類書』五十四，同五十五も徐光啓校閲とあり内容が全く一致する．

(13)　これらの内容については拙著：「『暦算全書』の三角法と『崇禎暦書』の割円八線之表の伝来について」で検討しておいたので参照されたい．

(14)　陳久金著：「徐光啓和『崇禎暦書』」，『徐光啓研究論文集』，学林出版社，上海，1986年，p.87.

(15)　『崇禎暦書』および『西洋新法暦書』には『割円八線互求法』と題するものは含まれていない．

(16)　李子厳著：「三角術及三角関数表之東来」，『中算史論叢』三巻，台湾商務印書館，中華民国23年，p.383.

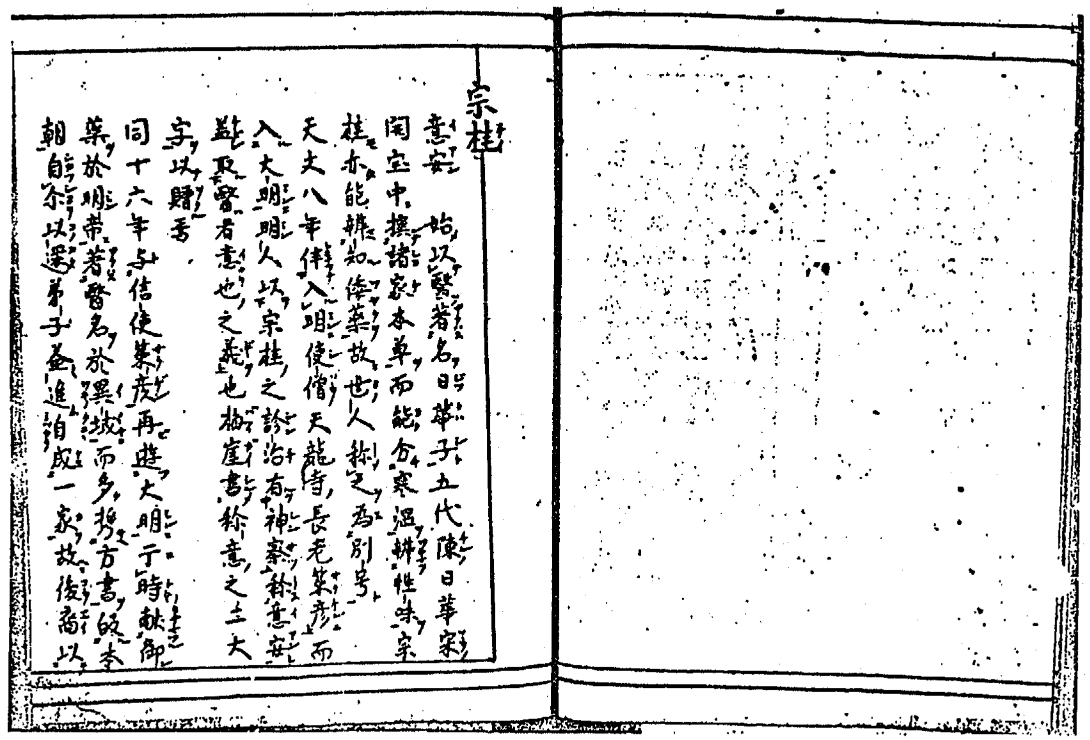
（平成２年10月12日受理）

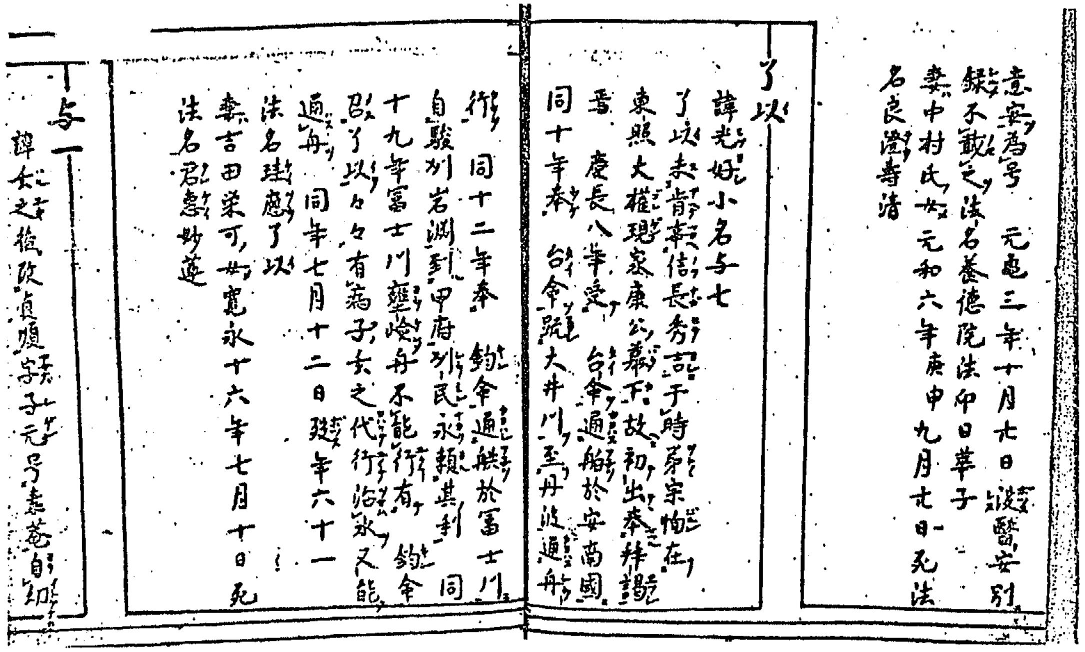
論　　説

『角倉源流系図稿』における毛利重能・吉田光由の事跡記載に関しての疑問

戸　谷　清　一

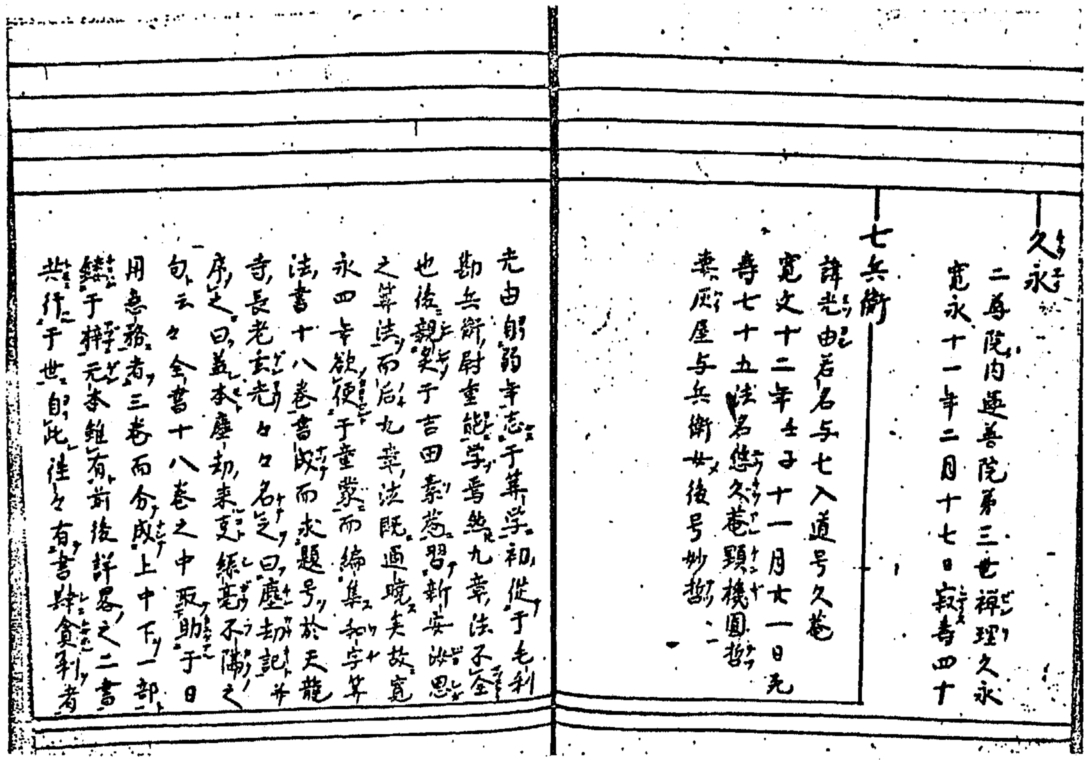
『角倉源流系図稿』（以下，『系図稿』と記す）は，角倉家直系の子孫角倉平治氏が所蔵しており，これを昭和48年荒木勲氏が紹介された．この『系図稿』には毛利重能と吉田光由の事跡が詳細に記載されている．この記載に関して疑問に感じる点があるので，以下にそれについて記してみる．

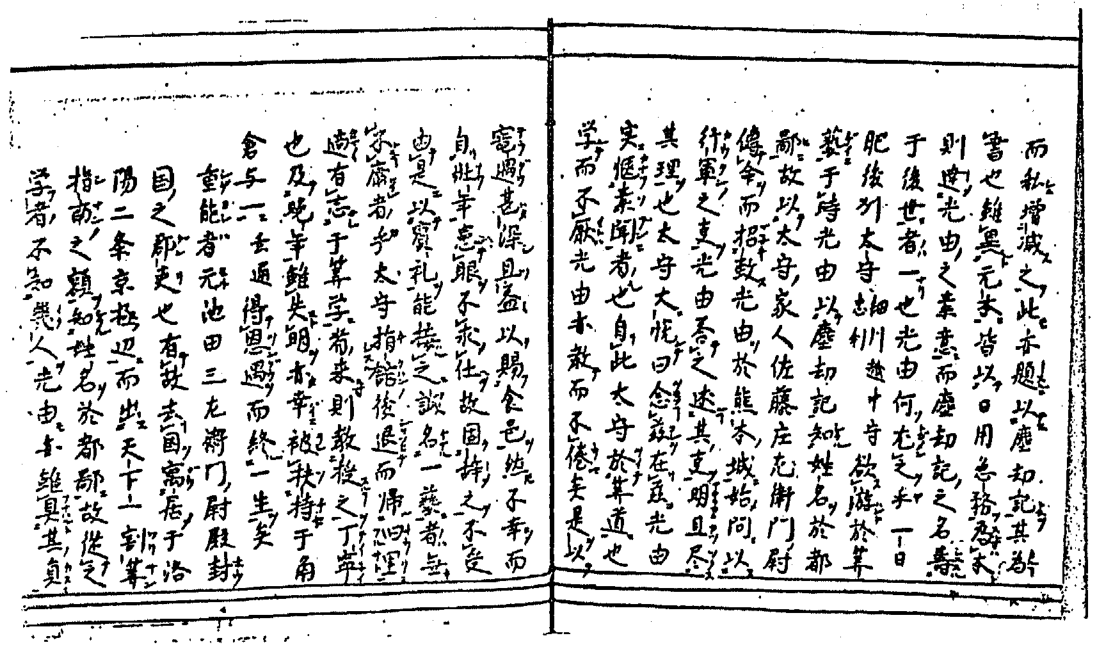

宗桂
意安　始以醫著名，日華子五代陳日華家
園宝中，撰諸家本草，而能分寒温，辨性味，宗
桂亦能辨知藥，故世人称之為別号
天文八年，伴入明使僧天龍寺長老策彦，而
入大明．明人以宗桂之診治有神称，称意安
號，取醫者意也之義也．朽庵書称意之二大
字以贈焉．
同十六年与信使策彦再遊大明，于時献御
藥於明帝，著醫名於異域，而多携方書，然本
朝能尓以還弟子益進，自成一家，故後裔以

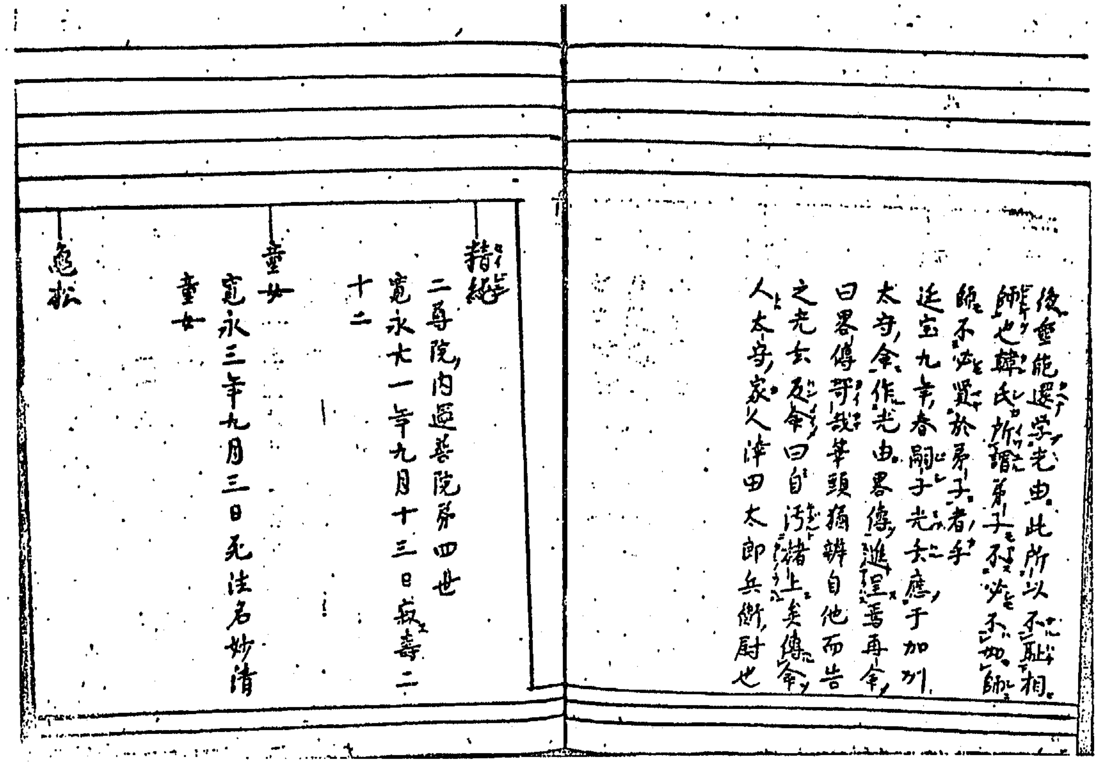


この系図をみると，宗桂・了以の記載は，①本人の諱　②事跡　③歿年と法名　④妻の歿年と法名となっている．

これに対し，吉田光由（七兵衛）の記載は，①本人の諱と号　②歿年と法名　③妻の号が記され，このあと空白があってそのあと丁度半折りの紙2まいを後から綴じこんだ形に







なっている部分に光由の事跡と一字下げて毛利重能の事跡の記載がある．

宗桂・了以その他の人の記載内容と比較してみると，本人の妻の記載で終っているのに対し，光由にかぎってそのあとへ追加のような形でその事跡が記載されており，宗桂・了以の事跡の記載内容にくらべて光由の記載内容は詳細すぎる．しかもそのあとへ，角倉家の系図とは関係のない毛利重能の事跡が記載されている．これはどういう理由によるものであろうか．

この『系図稿』の末尾には，

「右，角倉源流系図稿ハ，寛永年中官府ニ納ル吉田氏意安（注，元亀３年歿）家譜ヲ以ッテ之ヲ草創シ，同氏更ニ聞キ伝エル所ノ叓実ヲ以ッテ之ヲ討論シ，ソノ闕略ヲ補イテ之ヲ修飾シ，或イハ官医ト為ッテ世ニ鳴リ，或イハ浮屠氏ト為ッテ貴重セラレ，或イハ芸ニ遊ビテ姓名ヲ都鄙ニ知ラレ，或イハ世ニ称セラルル姓氏ノ絶エタルヲ継ギ，此ヲ以ッテ之ヲ潤色ス．嗚呼盛ンナルカナ．是ニ於テ貧賤憂戚ノ支族ソノ間ニ雑(マジ)ハリ出ズ．然リトイエドモ，天地ヲ以ッテ父母ト為セバ四海ノ内皆兄弟ナリ．何ゾ之ヲ恥ジンヤ．且又庸(モ)ッテ汝ヲ成(ナ)ルニ玉ニスル也．何ゾ之ヲ陋(イヤ)シムニ故有ラン．併シテ之ヲ系スルニ実録ヲ以ッテス．

……………………

時ニ貞享四年丁卯三月二日　田中氏光玄誌ス．

右，角倉源流系図稿ノ本紙ハ朱ヲ以ッテ系ヲ書シ，或イハ地名・人物ノ類ハ朱引ヲ加ウ．然レドモ今之ヲ略シテ墨ヲ以ッテ縦横ノ系ヲ書シ，又地名・人物ノ朱引ハ文ヲ以ッテ之ヲ覧レバ自カラ知ルベシ．何ゾ難キコト有ランヤ．故ニ復之ヲ略シテ書キ記サザル也

安永三歳甲午三月七日　角倉伝治之ヲ写ス．」(現文は漢文)

と記載されている．これをみると，この系図は寛永年間（1624〜1643）に官に納めた吉田意安（元亀３年，1572歿）草創の家譜をもとにして貞享４年（1687）に田中光玄が作成したものであり，現存のものはこれを安永３年（1774）に角倉伝治が筆写したものである．

さて，『角倉源流系図稿』に記載されている吉田光由の事跡であるが，前に述べたように，この部分は正常な形で記載された光由（七兵衛）の記事のあとへ追加の形で記述されている．光玄の記述から推すと，光玄は角倉の家譜についてその内容を全般にわたって討論し修飾したと見受けられる．その反面，この『系図稿』自体をみると光由の事跡を記した箇所はあとから追加挿入されたような体裁になっている．そして光由の事跡のみが他の人たちと異なって詳細な記述になっている．したがってこの『系図稿』は，①光玄は父光由の事跡のみを追加してこの系図稿へ挿入したのか，あるいは光玄は角倉系図全体を修飾し光由の事跡は後世になって塵劫記の名声があがってきたので角倉系図の中へ追加挿入されたのか．②光由の事跡を嗣子光玄が記したものとすれば，なぜ光由の『古暦便覧』『和漢編年合運図』に触れていないのか．③角倉家と関係のない毛利重能の事跡が角倉家の系

図の中へなぜ記載されたのか．④角倉家の傍系である田中光玄が記した系図稿がどうして角倉家本家に代々伝えられてきたものか．⑤光由の嗣子光玄の姓が田中になっており，光由は嗣子光玄に養なわれずにどうして角倉与一に扶養せられて一生を終ったのかなどの疑問が生じる．

しかし，光由の事跡の記載をみると，肥後太守（細川忠利）の家人佐藤庄左衛門尉とか，加州太守の家人津田太郎兵衛尉といったその関係者でないと知り得ない家人の姓名までが記されていることや，加州太守の命で光由略伝を延宝九年（1681）に嗣子光玄が作成したと記されており，こうした点を考えると上記の疑問はあろうが嗣子光玄は光由の事跡のみを角倉系図の中へ挿入して後書きを添えた，それが代々角倉家に伝えられてきたということになる．

『系図稿』の稿が何を意味するかなど，系図に関する知識がないので的はずれなことを記したかも知れないが，この『系図稿』について疑問に感じた点を記してみた．

（平成３年１月28日受理）

論　説

複素積分論萌芽期における複素数の有用性について

──実から虚への移行に基づく恒久性の原理──

塚　原　久美子

1．はじめに

本研究は，複素数概念の成立について，その歴史的背景と経緯を探ることを目的とするものである．

数学史の一般的通史においては，虚数がカルダノ（Girolamo Cardano, 1501～1576）によって認知され，ガウス（Carl Friedrich Gauss, 1777～1855）による複素平面の導入を機に市民権を獲得するまでのことが，簡単に概説されている．しかし，種々の数学的概念や理論の確立と同様に，複素数に関しても，その概念の成立過程や理論の歴史的展開はそれほど単純なものではなく，直線的発展性を持ってはいない．「2乗して負になる数」の実在性に関する存在論の問題に端を発し，複素数がその有用性の故に，数としての権威を誇るまでには，紆余曲折した長い道のりがあるはずである．特に，19世紀厳密化運動の旗頭ともなるべき複素解析学の理論展開において，複素数概念の把握の程度が非常に重大な意味を持つにもかかわらず，この点に関する研究は，ほとんどなされていない．

したがって，本研究では，複素積分論の萌芽期において，複素数がその有用性を通して事実上認知され，概念化されていく初期過程を追求する．

具体的には，まず第1に，「2乗して負になる数」が2次方程式の解として感知されてから，複素数が市民権を獲得するまでを，数学史の常識的知識の範囲で跡づける．第2には，複素積分論の先駆的存在であるコーシ（Augustin Louis Cauchy, 1789～1857）の業績に的を絞って，彼の画期的論文である“Mémoire sur les intégrales définies（定積分論），1814”[1-1] について考究する．特に，『定積分論』における複素積分の理論展開の中で果たす複素数の役割を知るとともに，そこに流れる時代の精神ともいうべき基本原理を見い出す．第3には，コーシの “Cours d'Analyse（解析教程），1821”[1-2] の第7章における複素数の定義と性質について考察する．

2．複素数前史

「2乗して負になる数」が初めて感知されたのは，ヘロン（Heron, BC 150～200 ?）の “Stereometria, BC 50 ?” においてが最初であろうと言われている．ディオファントス（Diophantus, 246 ?～330 ?）も，“Arithmetica, 275” の中で，周囲の長さが12，面積が7の直角三角形の直角を挟む2辺の長さを求める問題について言及しているが，両者とも，2次方程式の解法上現れる負数の平方根に戸惑い，解法を中断している．マハーヴィラ（Mahāvira, 850頃）やバースカラ（Bhāskara―Acharya, 1114～1185 ?）は，正数の平方根が既に正数と負数になることから，負数の平方根の存在を否定している．同様の理由で，パチオリ（Pachiori, 1455～1514）も，“Sūma, 1494” の中で，2次方程式 $x^2+c=bx$ は，$b^2/4\leqq c$ のときには解を持たないことを結論している．

「2乗して負になる数」を2次方程式の2つの解として初めて認知したのはカルダノである．カルダノは，“Ars Magna de Rebus Algebraicis（偉大なる術），1545”[2-1] で，連立方程式 $x+y=10$，$xy=40$ の解が，$5\cdot\widetilde{p}\cdot R\cdot\widetilde{m}\cdot 15$ と $5\cdot\widetilde{m}\cdot R\cdot\widetilde{m}\cdot 15$（今日的に書けば，$5+\sqrt{-15}$ と $5-\sqrt{-15}$ である）で表現されることを示しているが，検算により2解の和と積が確かにもとの方程式を満たしていることを考慮すれば，今日で呼ぶところの虚数解を認知せずにはいられなかったのであろう．しかしながら，カルダノが「2乗して負になる数」を認知した積極的な理由は，3次方程式の解法においてである．カルダノ流の解法のアルゴリズムを3次方程式

$$x^3-3x-2=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

に適用してみる．(1)の解が，$x=u+v$ で表されたとすると，

$$\begin{aligned} x^3 &= (u+v)^3 \\ &= u^3+v^3+3uv(u+v) \\ &= u^3+v^3+3uvx \end{aligned}$$

$$\therefore x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0$$

いま，

$$uv=1,\ u^3+v^3=2 \quad \cdots\cdots(2)$$

であるから，(2)を満たす u，v が見つかれば x は求まるはずである．ところで，(2)より

$$u^3v^3=1,\ u^3+v^3=2 \quad \cdots\cdots(3)$$

であるから，u^3 と v^3 は，2次方程式

$$X^2-2X+1=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

の2解である．つまり，3次方程式は2次方程式を解くことに帰着されるのである．(4)を解くと　$X=1$　であるから，$u^3=v^3=1$　が得られる．このことから，$u=v=1$，

したがって，$x=2$ が求まる．しかし，一方で，$u=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$，$v=\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}$

という，不合理な表現が現れる．ところが，$x=u+v$ に代入すると，$x=-1$ という実数解が得られることになる．解法のアルゴリズムの途中に，「2乗して負になる数」が現れるにもかかわらず，解は実数解になるというパラドックスが生じている．これは，今日，不還元の場合（casus irreductibilis）と呼ばれている。このことは，「2乗して負になる数」を2次方程式の解として形式上表現しながらも，そのような数が実在しえないことを「普遍的な規則」であると主張し，矛盾した態度をとっていたカルダノにとって，衝撃的な発見であったに違いない．カルダノにとっては，まさに，「詭弁的量（quantités sophistiques)」だったのである．

「2乗して負になる数」を「説明不可能（inexplicable)」と呼びながらも，カルダノよりもさらに積極的な態度をとったのはジラール（Albert Girard, 1595〜1632）である．ジラールは，“Invention nouvelle en l'algebre（代数学における新しい発見)，1629”[2-2]の中で，本来ならば不可能な存在である虚数解を，次に示す3つの理由で容認している．「一般的規則を確立させるため」，「他の解が見つからないため」，「その有用性のため」である．特に，「一般的規則の確立」とは，「代数学の基本定理」を示唆しているのであり，今日的に見れば，非常に先見的な主張である．

「虚数（nombre imaginaire)」ということばを初めて提唱したのはデカルト（René Descartes, 1596〜1650）である．デカルトは，“La Géométrie（幾何学), 1637”[2-3]の中で，「方程式の根は，実在的（réel）とは限らず，時々，想像上のもの（imaginaire）となる.」と述べているが，彼もまた，虚数の実在性に関する哲学的疑問を投げかけた1人であった．

ウォリス（John Wallis, 1616〜1703）は，虚数に幾何学的意味づけを施すことによって，虚数の実在性に関する曖昧さを克服しようと試みている．ウォリスは，“Algebra（代数学), 1673”[2-4]の中で，「負数が存在の不可能性を保持し続ける一方で，その物理的適用において容易に許容されうるならば，虚数についても同様のことがいえる．負数を負の線分として捕えるならば，虚数を一辺が負数の正方形の面積として考えることは可能である.」と述べている．さらに，ウォリスは，正数 b と c の等比中項が $\sqrt{bc}$ であるならば，正数 b と負数 $-c$ の等比中項が $\sqrt{-bc}$ であることに注目している．このように，存在に関する負数との類似性に着目し，負数の拡張として虚数を導入しようという漸新なアイディアと，さらには，実軸に対して虚軸の着想を持っていたことは，ガウスの先鞭をつける発想とも言えよう．

虚数の実在性に関する存在論の問題は，決着が着くべくもなく，したがって，虚数の定

義すらも曖昧なままに，17，18世紀における解析学のテクニカルな理論展開の中で，虚数は目覚ましい活躍を演ずることになる．

3．17，18世紀における解析学の合理化と虚数の役割

ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646〜1716）は，虚数について次のように述べている．「神性なる魂は，解析学の驚異と理念の世界の前兆として，崇高な解決の糸口を見つけた．それは，存在と非存在との間の両生類であり，我々はそれを想像上の根と呼ぶことにする.」[3-1] また，ライプニッツは，$\sqrt{-1}$ を彼流の記号論理学の中に同化させ，微積分計算のための手段として虚数を形式的に用いている．このことが，実は後に述べる，ジョン・ベルヌイ（Johann Bernoulli, 1667〜1748）との対数論争へと発展していく．

ライプニッツとベルヌイによる虚数の形式的利用法は，有理関数の部分分数への分解と，その積分において頻繁に用いられる．両者がほとんど同時に採用した方法の典型的例は，次のごとくである．

$\int\frac{a^2\,dx}{a^2-x^2}$ なる積分において，被積分関数を $\frac{a^2}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$ と部分分数に展開し，即座に対数関数を用いると，$\int\frac{a^2\,dx}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\{\log(a+x)+\log(a-x)\}+c$ を得る．この方法を，部分分数展開の結果得られた $\frac{1}{x+a+b\sqrt{-1}}$ の積分に対しても採用すると，$\int\frac{dx}{x+a+b\sqrt{-1}}=\log(x+a+b\sqrt{-1})+c$ が得られるというわけである．[3-2]

さらに，ベルヌイは，正接の n 倍角の公式を以下のように証明している．

$$\begin{cases}\tan A=x\\ \tan nA=y\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

とおくと，

$$n\,arc\tan x=arc\tan y\quad\cdots\cdots(2)$$

(2)を両辺微分して，

$$n\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)を両辺部分分数展開して，

$$n\left(\frac{dx}{x-\sqrt{-1}}-\frac{dx}{x+\sqrt{-1}}\right)=\frac{dy}{y-\sqrt{-1}}-\frac{dy}{y+\sqrt{-1}}\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)を両辺積分して,

$$n\{\log(x-\sqrt{-1})-\log(x+\sqrt{-1})\}=\log(y-\sqrt{-1})-\log(y+\sqrt{-1})\cdots\cdots(5)$$

$$\therefore n\log\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}=\log\frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\therefore\left(\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}\right)^n=\frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(7)式を y について解くと y を x で表す式が得られ，したがって，$\tan nA$ を $\tan A$ で表す式が得られるというわけである.[3-3]

以上の例が示すように，対数関数 $\log x$ の多価性や，(4)式 ⇒ (5)式における積分定数の不定性の問題に対して，全く配慮が見られないことに気づく．さらに大きな問題は，微積分学の基本定理 $\int f'(x)\,dx=f(x)+c$ を，部分分数展開の結果生じた虚数係数の有理式にまで，すなわち，複素領域にまで，形式的に利用していることである．このことから，証明の方法の正当性よりも，結果を巧妙に導くことが，ライプニッツやベルヌイの目的であったことがわかる.

18世紀初頭においては，$e^{\log z}=z$ により定義され，

(3, 1)　$\log zz'=\log z+\log z'$　と，

(3, 2)　$d\,(\log z)=\dfrac{dz}{z}$

とを満たす一価関数 $\log z$ が存在することは，周知の事実であった．しかしながら，先に述べたような虚数の形式的利用を背景として，$\log(-1)$ や，$\log(\sqrt{-1})$ の値の決定が大きな矛盾をもたらし，ライプニッツとベルヌイとの対数論争を引き起こすこととなった．ベルヌイは，$\log(-x)=\log x$ を主張した．その根拠は，$\log(-x)$ と $\log x$ が同じ微分 $\dfrac{d(-x)}{-x}$ と $\dfrac{dx}{x}$ を持つことと，$(-x)^2=x^2$ から $2\log(-x)=2\log x$ が得られるからであった．つまり，任意の x に対して，(3，1) を形式的に用いて，$\log(-x)=\log x+\log(-1)$ と変形すれば，$\log(-x)=\log x$ から，$\log(-1)=0$ を主張したことになる．一方，ライプニッツは，任意の実数は既に正の実数の対数となっているから，負の数，あるいは虚数の対数は，必然的に虚数であると主張した．その根拠として，$\log(-1)$ の値が実数でないことを，次のように示している.

$\log(1+x)$ を級数展開して，

(3, 3)　$\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

を得る．(3, 3) に $x=-2$ を代入すると，$\log(-1)=-2-\dfrac{2^2}{2}-\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{2^4}{4}-\cdots\cdots$ となり，この級数は発散するから実数としての和を持ち得ず，よって，$\log(-1)$ は虚数を表すというわけである。真に安易な結論である．ここで，ライプニッツが，級数展開は一つの代数的表記法であって，(3, 3) に如何なる数値を代入しても意味を持つと考えていることに注意したい.

この対数論争に決着を着けたのは，18世紀最大の解析学者，オイラー（Leonhard Euler, 1707〜1763）である．この錯綜した論争に対して，オイラーは次のように述べている.「人々は，ほとんど無意識のうちに，各数にはただ一つの対数が対応するものと仮定している．しかし，ほんの少し反省してみれば，対数の理論がはらんでいる困難や矛盾が，まさに，この，各数にはただ一つの対数が対応するという仮定に起因することに気付くのである．それ故，私は，これらすべての困難や矛盾を排除するため，まさに定義自身において，各数には無限個の対数が対応するということにする.」[3-4] こうして，オイラーは，対数関数の複素領域への拡張が，変数が実数である限りは隠されていた一つの現象，すなわち，対数の多価性という現象に対して，明晰な見解を与えた．実際，オイラーはオイラーの公式，$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$ を用いて，$x=e^c(\cos\phi+i\sin\phi)=e^c e^{i(\phi\pm2\lambda\pi)}$（$\lambda$ は0，または正の整数）から，$y=\log x=c+(\phi\pm2\lambda\pi)i$ を導いている．因に，$\sqrt{-1}$ のかわりに i を用いるようになったのは，オイラーに由来する.

一方，18世紀の解析学において，最初に虚数を形式理論的に取り扱ったのは，1710年，コーツ（Roger Cotes, 1682〜1716）である．公式，$\log e(\cos\phi+i\sin\phi)=i\phi$，すなわち，オイラーの公式，$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$ や，ド・モアヴルの公式，$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$ は，既にコーツにおいてその原型が見られる.[3-5] オイラーとド・モアヴル（Abraham de Moivre, 1667〜1754）は，この2公式の証明を試み，さらに，オイラーはジョン・ベルヌイへの手紙の中で，$y=2\cos x$ と $y=e^{ix}+e^{-ix}$ が，ある同じ微分方程式の解となることから，

$\cos s=\dfrac{e^{is}+e^{-is}}{2}$，$\sin s=\dfrac{e^{is}-e^{-is}}{2i}$　を導いている.[3-6]

こうして，最初は2次方程式の「空想上の解」として導入された虚数は，部分分数展開を用いた積分や，負数と虚数の対数の値の決定を出発点として，その実在性も不明確なまま，代数的操作による解析学の合理化と，数理物理学への有効性を特色とした解析ブームの中で，必要不可欠な存在となっていたのである．そして，数学者の最大の関心事は，もはや,「虚数とは何か」という存在論の問題から,「虚数によって何ができるか」という認識論の問題へと転換していたのである.

4．複素数の幾何学的説明

虚数は，18世紀解析学において，必要不可欠な合理的道具として効果的に使用されてはいたものの，一方では，その実在性の曖昧さを克服するために，幾何学的意味づけを行う努力が払われていた．虚数を平面上の1点として表現する方法は，古くは1673年，ウォリス，コーツ，ド・モアヴル，オイラーなどにも見られるが，虚数の代数的演算（和・積）にまで幾何学的意味づけを行ったのは，1799年，ヴェッセル（Casper Wessel, 1745～1818）である．しかし，ヴェッセルの場合は，虚数をベクトルとして定義し，虚数の演算をベクトル間の演算に還元して説明するに留まっている.[4-1]

今日，我々が複素平面と呼ぶところの原型を築いたのは，1806年，アルガン（Jean Robert Argan, 1768～1822）である．オイラーが初めて導入した虚数の極座標表示，$a+ib=r(\cos\phi+i\sin\phi)$ を用いて，その和，積の幾何学表示を説明している.[4-2] アルガンの研究は，コーシやハミルトン（William Roman Hamilton, 1805～1865）にとっては魅力的なものであり，彼らの研究との深い関連性にひどく敏感であったらしい．特に，コーシは，アルガンについて次のように述べている．「アルガンは，虚量の幾何学的説明の創案者であり，その明確性と精密性をもった虚量の理論は，代数学の一般性（géneralité de l'algèbre）へと導く.」[4-3] 実際，虚数の代数的演算と並行して，その幾何学表示による直観的理解は，コーシの複素積分論の確立に大きな影響を及ぼすことになる．

しかしながら，このような努力とは裏腹に，虚数の幾何学表示は，一般にはなかなか許容され難いものであった．事実，ヴェッセルが虚数のベクトル表示を発表してから，その論文が出版されるまでに，100年もかかっている．そして，ガウスもまた，初期の頃は，代数学の基本定理の証明において，極力，虚数の使用を回避しようとしている．先に述べたとおり，世間の情勢は，もはや，留まる所を知らない虚数を使用した無制限な形式計算へと傾倒していたからである．数や関数などの本質的な概念の確立よりも，微積分の純代数的扱いを目的とした解析学の合理化運動は，虚数の定義を遅らせただけではなく，複素積分論の萌芽期においてさえ、悪影響を及ぼすことになる．

さて，このような解析学の合理化運動の風潮の中で，ガウスは，1831年にやっと，整数論において，虚数の使用に対して明白な態度を表明した．「平方剰余の理論を複素領域の中に移し変えることは，今まで虚量に対して過った理解や偏見を持っていた人々には，全くショッキングで，不自然なことのように思われるだろう．……中略……．それまでは長い間黙認され，ある人々には不可能数と呼ばれ，また，ある人々には単なる記号的表現として遊ばれていたが，今初めて，その直観的意義を与えることができた．……中略……．

今まで虚量は，分類学的命名法によって，不適当な名称を与えられてきた．もし，＋1，－1，$\sqrt{-1}$ などを，＜正の単位＞，＜負の単位＞，＜不可能の単位＞などと呼ばずに，＜まっすぐに伸びた＞，＜逆方向に伸びた＞，＜横に伸びた＞などという表現に変えたならば，秘密主義的な暗黒の世界から解放されるだろう．……」[4-4] アルガンの着想である複素平面は，ガウスによってその地位を確立したのである．さらに，ガウスは，従来の「想像上の数（nombre imaginaire)」のかわりに，「複合的な数（komplex Zahl)」，すなわち，複素数ということばを初めて提唱した．一般に，我々は，複素数の市民権が確立した功績をガウスに帰しているが，ガウスが1811年にベッセル（Friedrich Wilhelm Bessel, 1784～1846）に宛てた手紙の中で，[4-5] 複素領域における線積分の定義や積分定理について言及していることも合わせて考慮すると，これは順当な評価だといえる．

複素数の幾何学表現が虚数の実在性の問題に決着を着け，整数論におけるガウスのスマートな複素数の利用法が，複素数の概念的理解に拍車をかけたことは言うまでもない．しかしながら，一方において，18世紀の微積分における複素数の効果的利用法が，19世紀初期の複素積分論の芽ばえに，どのように結びついていくのか，その彷彿とした過程を明らかにする方が，より興味深いテーマである．なぜならば，複素積分の理論形成が，複素数自身が本来持っている不思議な性質の数々を引き出していく，一行程でもあるからである．

5．複素積分論前史

18世紀後半には，問題解決のためのテクニカルな手段として導入された複素数が，実定積分の計算において，ますますその威力を発揮することになる．この時，複素数を最も効果的に活用し，数々の注目すべき結果を得たのは，オイラーである．1777年,[5-1, 5-2] オイラーは，まず，任意の複素数，$z=x+iy$（x, y は実数）の任意関数がすべて，$Z(z)=M+iN$（M，N は2変数 x, y の実数値関数）の形に書け，$z=x-iy$ に対しては，$Z(z)=M-iN$ の形に書けることに注目している．今日的に見れば，オイラーは，暗黙のうちに，任意関数 $Z(z)$ に対して

(5, 1)　$Z(z)=\overline{Z(\bar{z})}$，$(z\in\mathbb{C})$

すなわち，実軸に対して対称な複素関数を仮定していることになる．このことは，オイラーが，複素関数を複素平面から複素平面への写像としては捕えていなかったことを意味している．それどころか，オイラーは，(5, 1) 式を「虚数理論の基本定理」と呼び，すべての任意関数について成立すると考えていたらしい．この「虚数理論の基本定理」を用いて，オイラーは次のように理論を展開する．

まず，通常の積分，$\int Z(z)\,dz=V$ に対して，$z=x+iy$ を代入する．このと

き, $Z(z)=M+iN,\quad V=P+iQ$　と置けば,

$$(5,\ 2)\qquad P+iQ=\int(M+iN)\,(dx+idy)$$

と書ける.「虚数理論の基本定理」を用いれば, 同様にして,

$$(5,\ 3)\qquad P-iQ=\int(M-iN)\,(dx-idy)$$

とも書ける. さらに, (5, 2) と (5, 3) は,

$$(5,\ 4)\qquad P+iQ=\int(Mdx-Ndy)+i\int(Ndx+Mdy)$$

$$(5,\ 5)\qquad P-iQ=\int(Mdx-Ndy)-i\int(Ndx+Mdy)$$

と変形され, (5, 4) + (5, 5), および, (5, 4) − (5, 5) を実行すれば,

$$(5,\ 6)\qquad \begin{cases} P=\int(Mdx-Ndy) \\ Q=\int(Ndx+Mdy) \end{cases}$$

が得られる. この等式 (5, 6) は, 線積分として定義されたものではなく, あくまで, 複素形式 $A+iB$ の形式的代入と, 形式的代数計算によってのみ得られたものであることに注意したい. 次に, オイラーは, 等式 (5, 6) の右辺の積分が存在することから, $Mdx-Ndy$　と　$Ndx+Mdy$　は, それぞれ P, Q の完全微分になっていなければならず, したがって, 等式

$$(5,\ 7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{\partial N}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial y}=\dfrac{\partial M}{\partial x} \end{cases}$$

が成立しなければならないと主張している. (5, 7) 式は, 今日, 我々が「コーシ・リーマンの微分方程式」と呼ぶものであるが, その原型は既にオイラーにおいて見られる. しかし, この微分方程式と複素領域における微分可能性との関係については, オイラーは全く気付いていない. それどころか, 任意関数　$Z(z)=M(x,y)+iN(x,y)$　に対して, 等式,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=N(x,y) \end{cases}$$

を満たすような C^1 級関数, $\phi(x,y)$ の存在, すなわち, $Mdx-Ndy$ や $Ndx+Mdy$ の積分の存在を, 暗黙のうちに仮定している. オイラー自身の興味は, 関係式 (5, 7) の成立にあったのではないようだ. むしろ, 定積分　$\int Z(z)\,dz=V$　を計算するために, 等式 (5, 6) を利用したのだと言える. この手法を用いて, オイラーは, 既知の積分から未知の積分を数多く導いている. 特に, この方法を, $Z(z)=\dfrac{z^m}{(1\pm z^n)}$　の形の関数に適用し,　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (θ, constant) の変数変換を行うことにより, 各種

の注目すべき積分値を求めている. 結果的には, 複素領域における一定の動径に沿った積分ということになる. オイラーは, 複素数の導入によって, 実領域では見かけ上解決不可能な積分計算が容易に解決されることを示したのである. オイラーの貢献により, 複素数の使用は解析学において広く普及することになる.

さらに, 1752年に, ダランベール (Jean le Rond d'Alembert, 1717〜1783) もまた, 流体力学において, 非圧縮性流体の平面運動の研究の際に,「コーシ・リーマンの微分方程式」に到達している.[5-3]

オイラーとは独立に, ほぼ時を同じくして, ラプラス (Pierre Simon de Laplace, 1749〜1827) も, オイラーのものと類似した手法を用いて積分計算を手掛けている.[5-4] ラプラスは, まず, 確率論において現れる正規分布の積分計算から出発する. 彼の方法は, 得られた積分, $\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　を,「解析学の一般性」により, t が複素数の場合にも拡張するというものであった. 積分, $\int_0^\infty e^{-(ax-\frac{ri}{2a})^2}dx$ ($a, r\in\mathbb{R}$)　において, $t=ax-\dfrac{ri}{2a}$　という複素変数変換を行えば,

$\int_0^\infty e^{-(ax-\frac{ri}{2a})^2}dx=\dfrac{1}{a}\int_{-\frac{ri}{2a}}^\infty e^{-t^2}dt$ に帰着される. このことから, ラプラスは, 実部と虚部とをそれぞれ計算して, $\int_0^\infty \cos rx\cdot e^{-a^2x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a}e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$　という値を得ている. そして, 次のように締めくくっている.「我々をこのような結果に導いた解析学は, ＜実から虚への移行 (le passage du réel a l'imaginaire)＞を基礎としている. 実際, ここでは, t に関して, ある虚数値と無限大とを両端としてとられた積分を, あたかもこれらがすべて実数であるかのように取り扱ったのである.」[5-5]

さて, ここでラプラスが意味することは, 与えられた解析的式は, そこに現れる文字に実数ばかりでなく虚数を代入しても, やはり同様に妥当である, ということである. 実は, この信念は, ジラールがもともと提唱した「実から虚への移行における恒久性の原理」(実数の領域で得られるあらゆる等式は, 虚数に対しても適用できる) に由来している. さらに加えて言うならば, このことは, 17, 18世紀の数学者が好んで用いた「解析学の一般性 (généralité de l'analyse)」, または,「代数学の一般性 (généralité de l'algèbre)」ということばにも意味通ずるものである. これは, 発見的手法に基づく一つの原理であるが, 解析学上の諸問題を, 純代数的操作に還元することによって, 合理的に解決しようという意図を含んでいる. 複素数は, 彼らの意図した「代数的解析学」を確立するための必要不可欠な道具としての地位を確立し, もはや, 有用性については自明な真理を有する数だったのである.

オイラー, ダランベール, ラプラスらの実定積分計算における貢献は, 後の複素積分論

の創始にあたって重大な意味を持つことになる．しかし，彼らの理論には本質的な限界があった．常に実部と虚部とを分けて議論し，複素領域における線積分の考察にまでは至らなかった点である．そして，この原因が，複素数の形式的利用法にあったことは言うまでもない．実のところ，オイラーやラプラス自身も，彼らのとった実定積分値を求めるための発見的手法が，完全に厳密なものだとは思っていなかったらしい．ラプラスは，「実から虚への移行」について，次のように述べている．「この実から虚への移行は，数学者たちが長い間用いてきた帰納法にも似た，一つの発見的方法と考えられる．しかし，この種の方法は，どんなに用心深く，細心の注意をもって利用したとしても，得られた結果は常に証明を必要とする.」[5-6] つまり，ラプラスは，それまで長らく用いられてきた「実から虚への移行における恒久性の原理」に対し，一つの警告を発したことになる．実数で成り立てば虚数でも成り立つことは，ラプラス自身も信じて疑わなかったと思われるが，複素数の使用が便宜的手段に過ぎないことに気づき，証明の必要性を訴えていたというのは，彼の眼力の鋭いところである．そして，「実から虚への移行」のはらむ大難題は，コーシへと受け継がれて行くことになる．はたして，複素数は，コーシの展開する複素積分論の中で，独自の地位を確立することができるのであろうか．そして，また，発見の方法としての「実から虚への移行」は，厳密主義者コーシの手によって正当化されうるのであろうか．この2点に絞って，彼の『定積分論』について考究してみることにする．

6．複素積分論の幕明け

本論文の研究対象であるコーシの "Mémoire sur les intégrales définies（定積分論），1814" は，若き数学者のコーシにとっては初めての大論文である．この論文は，第1部と第2部から成り，それぞれ，「実から虚への移行を正当化する方程式について（Des équations qui autorisent le passage du réel a l'imaginaire）」と，「微分方程式の積分に伴うところの諸困難について（Sur les difficultés que peut offrir l'intégration des équations différentielles）」というタイトルが付けられている．今日的に解釈した場合の内容としては，第1部は，コーシ・リーマンの微分方程式，積分定理，および，その応用についてであり，第2部は，留数定理，積分公式，および，その応用についてである．本論文では，第1部のみに焦点を絞ることにする．

まず初めに，序文中に見られるコーシの意志表明について紹介する．

「今日の解析学における多くの問題の解法は，積分値の決定に帰着される．事実，幾何学者たちは，積分値の決定問題を非常によく取り扱っている．……中略……．オイラーやラプラス氏によって得られた積分の中には，「実から虚への移行」に基づくところの一種の帰納的方法によって，初めて導かれたものもある．この種の移行を用いた方法は，しばしば，非常に鋭敏な手段となり得るのであり，数々の注目に値する結果を導くのに有用である．しかしながら，ラプラス氏も気付いているように，この種の理論にはいくつかの困難な点が含まれているという事実は，免れ難いものである．……中略……．このような不安を取り除くために，得られた積分の値を別の方法によって，注意深く確かめた．オイラーに比べると，ポワソン（Siméon Denis Poisson, 1781～1840）氏の方は，2重積分による方法，あるいは，2階の微分方程式の解法によって，結果の証明を与えている.[6-1] この問題を熟慮反省し，得られた結果を総合した上で，直接的・厳密性の上に成り立った解析学において，この実から虚への移行を確立したいと願う．そのための方法が，この論文の意図するところの研究対象である．人々は，たぶん，興味なくしては，この論文を読まないであろう．なぜならば，ただ単に，従来の方法が提出している困難性の一つが解決されたというだけでなく，このことが解析学の利益にもつながることであり，いわばそれ自身，新しい積分法の誕生ともいうべきものだからである.」

以上のようなコーシの言明から，実定積分の計算が，オイラー以来の最大のトピックスであったことが察せられる．また，コーシもラプラスと同様，一種の帰納的方法を用いて得られた結果に対して，その証明の必要性を指摘している．しかし，ラプラスが得られた結果の根拠に対しては非観的であったのに対し，コーシは，「実から虚への移行」を正当化することによって，結果に対する論拠を与えようと言うのである．はたして，コーシは，複素数を用いることによって，実益を兼ね備えた新しい証明の方法論を手中に収めることができるのであろうか．

7．定積分計算における複素数の有用性

『定積分論』は，かなり難解なスタイルで書かれているため，原義を損わない程度に，現代的に簡潔化して再現してみることにする．

任意の有限確定（déterminée）な関数，

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy$

に対して，積分，

（7，1）　$\int f(z)\,dz$

を考える．これを x と y で1回ずつ微分することにより，

（7，2）　$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

を得る．（7，2）式をさらに計算すれば，

$$(7,\ 3)\quad \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)+i\frac{\partial}{\partial y}v(x, y)=-\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)+i\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$$

を得る.

$z=x-iy$

に対しては,「虚数理論の基本定理」を用いて,

$f(x-iy)=u(x, y)-iv(x, y)$

であるから, 同様にして,

$$(7,\ 4)\quad \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)-i\frac{\partial}{\partial y}v(x, y)=-\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)-i\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$$

を得る. ((7, 3)+(7, 4))$\times\frac{1}{2}$, ((7, 3)−(7, 4))$\times\frac{1}{2}$を実行すれば,

$$(7,\ 5)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$$

が得られるという. これは, 今日, 我々が「コーシ・リーマンの微分方程式」と呼ぶところの関係式に, 形式上はそっくりである. そして, コーシは, これこそが「実から虚への移行」を正当化する等式であると述べている. しかし, (7, 5) 式が, 実数の領域で成立する trivial な性質を, 複素領域で形式的に操作することによって得られた式であることに注意したい. たとえば, (7, 1) 式が, 仮に上端, 下端を指定したとして, 任意の積分路に対して定義されることを自明のこととして扱っている. さらに, (7, 1)⇒(7, 2) において, 微積分学の基本定理が複素領域においても成立することを, やはり自明なこととして扱っている. $\frac{d}{dz}\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta=f(z)$ を満たすような $\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta$ の存在を仮定していることの中に, 既に, $f(z)$ の正則性が仮定されているわけである. しかし, この時のコーシは, 今日の正則性の概念を全く持ち合わせてはいない.

続いて, コーシは, (7, 5) 式を積分領域,

$D:(x_0, X)\times(y_0, Y)$

において, 辺々2重積分する. このとき, この2重積分を積分順序交換可能な異次積分と同一視すれば,

$$(7,\ 6)\quad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{\partial u}{\partial y}\,dydx=-\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdy\\[2mm] \displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{\partial v}{\partial y}\,dydx=\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial u}{\partial x}\,dxdy\end{cases}$$

が得られ, したがって,

$$(7,\ 7)\quad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X}\{u(x, Y)-u(x, y_0)\}\,dx=-\int_{y_0}^{Y}\{v(X, y)-v(x_0, y)\}\,dy\ \cdots\cdots(1)\\ \displaystyle\int_{x_0}^{X}\{v(x, Y)-v(x, y_0)\}\,dx=\int_{y_0}^{Y}\{u(X, y)-u(x_0, y)\}\,dy\ \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

を得る. コーシは, (7, 7) 式を導くところで終わっているが, 彼自身も後で註釈しているように, (7, 7)(1)$+i\times$(7, 7)(2) を実行すれば,

$$(7,\ 8)\quad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X}\{u(x, Y)+iv(x, Y)\}\,dx-\int_{x_0}^{X}\{u(x, y_0)+iv(x, y_0)\}\,dx\\ \displaystyle=i\int_{y_0}^{Y}\{u(X, y)+iv(X, y)\}\,dy-i\int_{y_0}^{Y}\{u(x_0, y)+iv(x_0, y)\}\,dy\end{cases}$$

を得る. 実は, これは, 多少の変形を施し, 今日的に拡大解釈をすれば, 矩形を積分路に選んだときの「コーシの積分定理」に他ならない. コーシが積分定理に気が付かなかった最大の理由は, 実部と虚部とを常に分けて議論していたためである.

ところで, コーシの最大の関心は, 公式 (7, 7) を応用させ, 数多くの定積分計算を統一的方法で公式化することにあった. 実際,『定積分論』の大半は夥しい計算例の反復に終始している. その典型的一例を挙げる.

$f(x)=e^{-x^2}$

のとき,

$f(x\pm iy)=e^{-(x\pm iy)^2}=e^{-x^2+y^2}\cdot e^{\mp 2xyi}$

であるから,

$$\begin{cases}u(x, y)=e^{-x^2}\cdot e^{y^2}\cdot\cos 2xy\\ v(x, y)=-e^{-x^2}\cdot e^{y^2}\cdot\sin 2xy\end{cases}$$

を得る. これに, (7, 7) 式を適用すると, 公式

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx=e^{-y^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-y^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2xy\,dx=e^{-y^2}\int_0^b e^{y^2}\,dy$$

が得られる. それまでは未知の積分であった左辺の積分を, 右辺の既知の積分に置き換えることによって, 新しく積分値を求めることが可能になったのである. さらに, (7, 7) 式を基本としながら, $z=x+iy$ のかわりに, $z=ax+ixy$, $z=x\cos y+ix\sin y$, $z=ax^2+ixy$ などと変数の表示の仕方を変えることによって, さまざまな具体例を長々と示している. 結果的にコーシが示したものは, 特に積分の上端, 下端が無限大であるような種々の定積分の値を求めることと, そのための公式化であって, 複素数の醸し出す美しい性質, 積分定理や正則性などについては, 一斉認識していないのである.

８．コーシの意図した「実から虚への移行」の正当化の意味

コーシの『定積分論』は，厳密性の観点からすれば，致命的ともいうべき方法論上の欠陥を露呈していた．事実、この論文の評者であるルジャンドル（Adrien Marie Legendre, 1752～1833）は，コーシの得た種々の結果を評価しながらも，「コーシ氏が用いた方法は，ただ単に虚数を媒介とした帰納的方法なのであって，従来の解析学がはらんでいる如何なる困難性も克服してはいない.」と述べている．つまり，コーシの用いた手法は，依然として，17，18世紀流の「恒久性の原理」を色濃く残したものであることを指摘しているのである．序文中に見られるコーシの目的は，18世紀以来用いられてきた「実から虚への移行」を正当化することにあった．そのために，オイラーやラプラスらの採用した定積分の計算法に対して，統一的な理論を与えることであった．しかし，コーシにとっての正当化の意味とは，厳密性の点で問題のある複素積分の形式的扱いを，怪しげな虚数表現を可能な限り回避することによって，実の世界に引き戻し，実解析学の範疇での議論に帰着させることではなかったかと考える．そして，その正当化のために，虚数を単なる媒介者として位置づけることによって，従来の解析学を純代数的手法に還元させ，厳密化のためのプログラムを作ろうと試みたのではなかったかと考える．しかしながら，「実から虚への移行」を真に正当化し，複素数が独自の地位を確立するためには，実解析学における諸概念を明確にするとともに，複素変数複素数値関数をdirectな形で受けとめ，複素領域における微分・積分の定義とその意味を明らかにすることから始めなくてはならないのである．

コーシにおいて，複素数は，定積分計算のための有用性という観点においては，自明な数であり，事実上認知されていることは明らかである．しかしながら，正則性の概念，コーシ・リーマンの微分方程式や積分定理の意味が認識されていない以上，複素数は，まだまだ，そを自身の持つ絶対的威力を発揮しているとは言い難いのである．

９．コーシによる複素数の定義

1814年以降，ルジャンドルによる痛裂な批判に応ずるため，コーシは『定積分論』を再度見直すことになる．そして，方法論の再考が，実解析学の厳密化のためのモチーフとなったとも考えられるのである．厳密主義教科書の権化とも言われる“Cours d'Aanalyse（解析教程）”が，この後1821年に発表されることになる．この中で，コーシは，複素数の定義とその性質について延々と述べているのである．1814年の論文で，複素数に媒介者としての地位しか与えなかったコーシは，多少の後ろめたさを感じていたのかもしれない．

『解析教程』の第７章は，「虚量表現とその絶対値（Des expressions imaginaires et

de leurs modules)」というタイトルがつけられている．特に，第１節の「虚量表現に関する一般的考察（Considérations générales sur les expressions imaginaires)」では，虚数の定義と有用性を示している部分があるので，考察を加えてみたい．コーシは次のように述べている．

「解析学において，それ自身は全く意味を持たないか，もしくは，それが本来持っているはずの値とは異なった値を持つような代数的記号の組み合わせ全体を，我々は，＜記号的表現（expression symbolique)＞，あるいは，＜記号（symbolique)＞と呼ぶことにする．同様にして，文字どおりに，または，一般的に決められた約束に従って解釈しても正しくなく，意味を持たないが，一定の規則によって，方程式自身，あるいは，その中に現れる記号を修正したり変化させるときには，正しい結果が得られるようなもの全体を，＜記号的方程式（équations symbolique)＞と呼ぶ．こういった記号的表現や記号的方程式を用いることは，しばしば計算を簡単にしたり，一見かなり複雑に見える結果を簡潔な形に書き直す手段となる．記号的表現や記号的方程式を考察することは，解析学において，何らかの重要性を持つものであり，何よりも我々が＜虚量（imaginaires)＞と名付けるところのものを明確に記さなければならない．我々は，如何にして，それらの記号を虚量表現として使用するのかを示すことにしよう.」

以上の内容は，1814年の『定積分論』で用いた複素数の意義と，コーシ・リーマンの微分方程式の有用性を裏づけることを意識しているに違いない．

たとえば，コーシは，三角関数の加法定理を例に挙げて，複素表現の有用性について述べている．まず，

$\cos a+\sqrt{-1}\sin a$，$\cos b+\sqrt{-1}\sin b$，$\cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b)$ には，一般的な約束もないし，意味をも持たない記号的表現であると述べ，これらを「虚量表現（expressions imaginaires)」と名付けている．そして，公式

$$(9,\ 1)\qquad \cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b) =(\cos a+\sqrt{-1}\sin a)(\cos b+\sqrt{-1}\sin b)$$

を仮定し，これが，文字どおりに解釈しても正しくないし，意味を持たない式であると言う．（9，1）式の右辺を「代数的乗法（multiplication algébrique)」という既知の規則によって掛け算をすれば，

$$(9,\ 2)\qquad \cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b) =\cos a\cos b-\sin a\sin b+\sqrt{-1}(\sin a\ \cos b+\sin b\cos a)$$

となり，したがって，実部と虚部をそれぞれ比較して，加法定理

$$(9,\ 3)\quad \begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a\end{cases}$$

が得られるというわけである．そして，公式（9，3）は，記憶しようなどと苦労しなくても，以上のような「記号的表現」と「代数的乗法」を用いれば，随意に思い出せるような簡単なものであると述べている．

コーシが，「記号的表現」と「代数的演算」により，計算と公式の合理化を意図していることは，頷ける．そして，「虚量表現」がそのための代表的な「記号的表現」として定義されていることもわかる．しかし，ここでは，公式（9，1）を，単なる「記号的表現」として仮定することの根拠が曖昧である．(9，1）式は，幾何学的説明を加えることによって，文字どおりに解釈できうるものであり，コーシが言うように，意味をもたない「記号的表現」であるとは理解し難いのである．このことは，コーシが，複素数の幾何学的な知識に乏しかったことを意味するものではない．代数的形式主義に基づいた「解析学の一般性」を追求するあまりにとった強引な所業だと言えよう．

さらに，続けて，コーシは，複素数を$\alpha+\sigma\sqrt{-1}$（α，σ は実数）なる形の「虚量表現」として定義し，その四則演算についても，$(\sqrt{-1})^2=-1$ の約束のもとで，実数と同様な代数的操作が行えることを説明している．一見，正しく思われるが，実は，$\alpha+\sigma\sqrt{-1}$ という定義の中に，既に加法と乗法が含まれているわけであり，循環論法に陥るというまちがいを犯している．蛇足ではあるが，これは，高等学校における複素数の導入の際にも，時々見られるまちがいである．この問題を解決するのが，1837年，ハミルトンであり，彼が，複素数を実数の順序対として定義し，複素数についての論理性を確立することになる．[9-1]

『解析教程』では，他にも，複素数の絶対値（module），共役複素数（conjuguée），極座標表示（絶対値が1のときには，コーシは簡約形（l'expression réduite）と呼ぶ），実変数複素数値関数の定義やその微積分などについても述べられている．

コーシにとって，複素数や複素数を用いた式は，全く意味を持たない symbolique なものであった．そして，複素数は，解析学の合理化のためにのみ活躍する便宜的手段であり，あくまでも，虚表現としての有用性を持ち合わせていたに過ぎなかったのである．したがって，ごく初歩的な，複素数とその四則演算の定義においてさえ，論理的欠陥を免れなかったのである．すなわち，この時点でのコーシにおいては，複素数の概念は完全に確立されていなかったと言える．

10. おわりに

複素数は，その概念が導入されてから定義が確立されるまでに，およそ300年という長い歴史を持っている．このような長い年月を要したのは，複素数がその生い立ちにおいて持っていた「2乗して負になる数」という，形而上学的な曖昧さによるものであった．複素数の神秘性を剥奪し，形而上学的な曖昧さを克服するものは，決して，論理的に欠陥のない厳密な定義，定理や理論の定式化なのではない．理論の発見と証明の方法論の中で展開される，その有用性なのである．そして，複素解析学の発達を促したものは，「実から虚への移行における恒久性の原理」に基づいた複素数の形式的利用法と，そこから生まれた論理的欠陥への反省なのである．とりわけ，コーシは，19世紀の厳密化運動の先駆者として，ガウスとともに並び称されるが，厳密化のためのモチーフとして，こうした複素数の概念化もまた，一つの背景となっていることを，我々は深く認識すべきである．

11. 今後の課題

本研究では，複素数の歴史，特に，複素積分論の萌芽期における複素数の有用性について考究したのであるが，今後は，複素解析学の発達をテーマとして，さらに深く，コーシの厳密化運動の過程を追求してみたいと考える。

12. 文　献

★がついているものは，筆者が特に参考とした文献である．

★1－1　A. L. Cauchy: Mémoire sur les integrale definies, Mémoires présentés par divers savants (lu à l'Institut le 22 août 1814, remis au sécretariant pout être imprimé le 14 Sept. 1825), Sciences mathématiques et physiques, seconde serie, t. I, (Paris 1827), p.599-799; Oeuvres complètes (1) t. I, p.319-506.

★1－2　A. L. Cauchy: Cours d' Analyse de l' École royale polytechnique, (Paris 1821); Oeuvres complètes (2) t. III, p.1-476.

2－1　G. Cardano: Ars Magna, (1545); Opera omnia, Ⅳ p.287. Lyons, 1663, Johnson Reprint Corp., 1964.

2－2　A. Girard: L'invention nouvelle en l'algebre, fol FI. Amsterdam,1629.

2－3　R. Descartes: La Géomètrie, 1705 ed., p.117; Dover (reprint), 1954. Book 3.

2－4　J. Wallis: Algebra, cap. LXVI; vol, Ⅱ, p.286, 1673.

3−1 G. W. Leibniz: Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas. Acta Erudiforum (Leipzig), Mai 1702, p.210-219; Leibnizens Mathematishe Schriften, published by C. J. Gerharadt. Bd. 5 (Halle 1858), p.350-361.

3−2 J. Bernoulli: Solution d' un problème concernant le calcul intégral. (Paris 1704), p.289-299; Opera omnia, t. I (Lansannae et Genevae 1742), p.393-400.

3−3 J. Bernoulli: Angulorum arcuumque sectio indefinita. Acta Eruditorum, Juni 1712, p.274-277; Opera omnia, t. I (Lausannae et Genevae 1742), p.511-514.

3−4 L. Euler: Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 14, 1769, 72-103, pub. 1770; Opera, (1). 17, 289-515.

3−5 R. Cotes: Harmonia mensurarum (posthumous), p.28 Cambridge, 1722; Bibliotheca Mathematica, (3), Ⅱ, p.97-102, 442.

3−6 L. Euler: Miscellanea Berolinensia, 7, 1743, p.172-92; Opera, (1), 14, p.138-155.

4−1 C. Wessel: Essai sur la représentation analytique de la direction, Royale Academy of Denmark, Copenhagen, 1897.

4−2 J. R. Argan: Essai sur une manière de représenter les quantites imaginaires dans les constructions géométriques, Paris, 1806; 2nd ed., Paris, 1874.

4−3 A. L. Cauchy: Mémoire sur les quantités géométrique, Exercices d' analyse et de physique mathématique, 1847.

4−4 C. F. Gauss: Anzeige, Göttingische gelehrte Anzeigen, April 23, 1831; Werke, Ⅱ, 169-178.

4−5 C. F. Gauss: Brief an Bessel vom18, Werk, 8 p.90-92.

5−1 L. Euler: De integrationbus maxime memorabelibus ex calkulo imaginariorum oriundis. Conb. exhib. die 20. Mart.1777. Nova Acta Petrop., t. Ⅶ (ad annum 1789) (Petropdi 1793), p.99-133; Opera, (1), 19, 1-44.

5−2 L. Euler: De insiqui usu calculi imaginariorum in analysi. Conv. exhib. die 3. Nor. 1777. Nova Acta Petrop., t. ⅩⅡ (ad annum 1794) (Petropoli), p.3-21.

5−3 J. R. d'Alembert: Essai d'une nouvelle théorie de la résistanace des fluides (Paris, 1752); E. T. Bell, Development of Mathematics, p.465.

5−4 P. S. Laplace: Théorie analytique des probabilités. Partie I, Chap. Ⅱ and Ⅲ. Aditions Ⅱ and Ⅲ. Paris 1812.

5−5 P. S. Laplace: Oeuvre Ⅶ, p.106.

5−6 P. S. Laplace: Oeuvre Ⅶ, p.96.

6−1 S. D. Poisson: Mémoire sur les intégrale définies. Journal de l'École polytechnique, Cahier 16 (Paris, Mai 1813), p.215-246.

9−1 W. R. Hamilton: Conjugate Functions and on algebra as the Science of Pure Time, trans., Royal Irish Acad., 17, 1837, p.293-422.

★ D. E. Smith: History of Mathematics, vol. Ⅱ, Dover, 1958.

★ M. Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford, 1972.

★ U. Bottazzini: The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass, Springer-Verlag, 1986.

★ H. Freudenthal: Cauchy. Dictionary of Scientific Bibliography, vol. 3., New York: Scribners,1971, p.131-148.

★ J. V. Grabiner: The Origin of Cauchy's Rigorous Calculus, Cambridge, Massachusetts, and London, England: The MIT Press, 1981.

★ 彌永昌吉:『現代数学の基礎概念（上）』, 弘文堂, 1944.

★ J. デュドネ編 『数学史 1700−1900 Ⅰ』, 岩波書店, 1985.

★ 長岡亮介:『複素関数論の誕生, 上, 中, 下』, 数学セミナー, 1986, 6月号, 7月号, 8月号, 日本評論社.

(平成3年3月15日受理)

円周率3. 2と3. 16

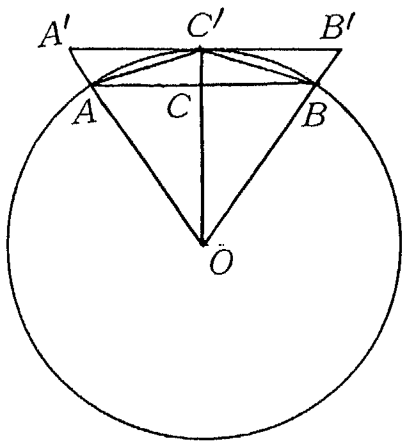
平 山　締

『算用記』,『割算書』,『塵劫記』などに，円周率3.2と3.16とが使われている．その出典は不明である．世界中どこにも，この二つの円周率を使った所はない．この二つの値だけが50年間も和算では使われた．それには何か根拠があるに違いない，と私は次のように考えた．

円に内接する正多角形と，それに相応する外接正多角形の周の間に円周がある．内接，外接の周の相加平均を，正六角形，正十二角形について作ってみたら，面白い結果が出たから，報告したい．

まず半径 $OA=1$ なる円に内接する正六角形の一辺は $AB=1$ となる．周は6となる．

次に弧 AB の中点を C' とすれば，AC' は円に内接する正十二角形の一辺となる．次にこの長さを計算する．



$AC'=\sqrt{AC^2+C'C^2}$，$AC=0.5$

$OC=\sqrt{AO^2-AC^2}=\sqrt{1^2-0.5^2}=\sqrt{0.75}$

$=0.8660254$

故に，$CC'=1-0.866254=0.1339746$

故に，$AC'=\sqrt{0.5^2+0.1339746^2}=0.5176381$

故に，半径1なる円に内接する，

正六角形の周 $=1\times6=6$

正十二角形の周 $=0.5176381\times12=6.2116572$

となる．

次に，前図において $A'B'$ が円に外接する正六角形の一辺となる．

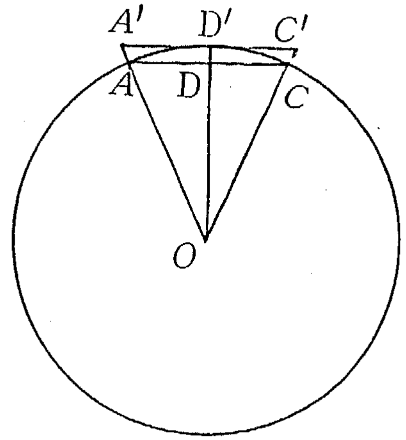
故に，$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{OC'}{OC}$

故に，$A'B'=\dfrac{OC'\times AB}{OC}=\dfrac{1\times1}{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{0.75}}=\dfrac{\sqrt{0.75}}{75}$

$=\dfrac{0.8660254}{0.75}=1.1547$

これは外接六角形の一辺である．

右図で AC を半径1なる円に内接する正十二角形の一辺（$AC=0.5176381$）とする．外接正十二角形の一辺を $A'C'$ とすれば，



$\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{OD'}{OD}$，故に，$A'C'=\dfrac{OD'\times AC}{OD}$

ここで，$OD'=1$，$AC=0.5176381$ なる故

$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{1^2-0.258817^2}$

$=\sqrt{0.933012725239}=0.965925$

故に，$A'C'=\dfrac{0.5176381}{0.965925}=0.5358984$

故に半径1なる円に外接する，

正六角形の周 $=1.1547\times6=6.9282$

正十二角形の周 $=0.5358984\times12=6.4307808$

以上は計算の便宜上，半径 $=1$ としたが，これを直径 $=1$ に直せば，

内接する正六角形の周 $=3$，　内接する十二角形の周 $=3.1058$

外接する正六角形の周 $=3.4637$，　外接する十二角形の周 $=3.2153$

となる．内接，外接の相加平均を作れば，

正六角形では，3.2318となり，正十二角形では3.1605となる．

少し乱暴な計算ではあるが，ここに円周率3.2と3.16が得られた．これだけの計算は避けられないであろう．この計算の過程を見ると，

①ピタゴラスの定理が屢々使われた．それに伴う開平の計算が必要になる．

②内接の周を計算して，外接の周に直すには，比例の理論が必要になる．この計算は容易なことではない．

算用記の著者，またはそれ以前にどんな人物がこの計算をしたか，思うこと久し．

会　報

珠算史研究学会の学会活動

本学会は創立10周年を迎えた．その時の記念行事についてはすでに報告したので，本学会の創立以来の活動状況を報告する．

学会設立に当って，１つの願いでもあった復刻を，浅井氏は生前，自分の手で

遠　藤　利　貞　　「算顆術授業書」（国会図書館蔵）
程　　大　位　　「算法統宗」（日本大学蔵）

と２冊を行なっている．この遺志をつぎ，

国定教科書　教師用　甲種（黒表紙）
国定教科書　教師用　乙種（黒表紙）
国定教科書　「尋常小学算術」（緑表紙）　第４学年～第５学年
魁本対相四言雑字
高　橋　栄　蔵　　「亀井算法」上下

など，復刻書籍12冊を刊行した．

研究誌としては，「珠算史研究」23巻の発行を行なっており，ここ１，２年の論文には，

暗算教育の歴史	鈴木久男	(1989. 9)
三算結合教育の歴史と現状	黄　継魯	(1989. 11)
意思・約束を表現した結縄に関する考察	中野敏雄	(1989. 11)
中国算盤の桁数の沿革	姚　文海	(1990. 8)

などがある．

また研究誌の増刊号として，珠算史以外の論文，随筆，紹介記事を掲載した「ピント」を1986年５月に創刊し，年１回，現在第６号の発行を終わっている．

第６号には

「珠算之最」拾零	冀　龍飛
城隍廟と算盤	須藤昭男
商除法に還元句法を導入した人達について	名倉敏克

の掲載がある．

研究発表会は，設立当初より総会時，全国珠算教育連盟の研究集会翌日と，年２回慣例化され実施していたが，1988年より年１回，総会時に実施されることとなり，15回を数

えている．

珠算による英語標準化の試み	加藤政弘	(1988. 9)
明治以降における商除法及び亀井算の普及について	名倉敏克	(1988. 9)
標準除法の名称について	鈴木久男	(1988. 9)
暗算教育の歴史	鈴木久男	(1989. 9)
日本における三算結合教育のある実践過程	松本　清	(1989. 9)

などがある．

そろばん産地での工場見学，古そろばん・古書収集家の訪問見学と８回にわたる見学会を実施した．昨年は，会員，大竹茂雄・高桑恭一両氏の案内で，関孝和の顕彰碑をはじめ，浅川要吉郎・渡辺雅春・狩野亀五郎など「群馬県の和算家・そろばん師匠の事跡めぐり」を行った．参加者43名である．

今年は，４月１日，２日と「雲州算盤と三上義夫博士のふるさと」見学会の旅を予定している．

また，この２年間に，計14回に及ぶ珠算史講座を東京（参加者80名）・東北（仙台・福島）（参加者70名）・名古屋（参加者130名）の３会場で開催した．

当学会には，現在58名の外国人会員がおり内53名が中国人である．外国人会員は会費納入の義務は免除され，かわりに資料の提供をお願いすることになっている．

このような関係で，中国との交流は創立当初より深く，1982年，1985年と訪中団を派遣し，程大位逝世380周年には，特別訪中団を組織して故地を尋ね，募金70余万円を贈っている．

外国人会員としては杜石然（1982），周葵（1985），李培業（1987）の各氏が来日し，それぞれ講演会・研究発表会を開催した．

1988年，中国・浙江省珠算協会から来日依頼の問いあわせをうけ，学会としてもその受け入れ態勢を整えるべく，「海外珠算交流基金要項」を制定し，準備を整えたのであった．しかし天安門事件の発生により，残念ながらその来日は見合わせざるを得なくなった．昨年11月，中国農業珠算協会の招きで中国にわたった鈴木会長には改めて，浙江省珠算協会の幹部から来日についての打診があったという．

昨年８月，26日より６日間の日程で，日華珠算学術交流団を組織し，高雄，台南，嘉義，台中，新竹の各城隍廟の見学を行い，台北では日華珠算学術発表会を開催した．

海外活動は中国，台湾など近隣にとどまらず，ロシアそろばん“ショティ”の調査のため，1983年，1984年と２回にわたり，モスクワ・レニングラード・ソ連領シルクロードへと視察団を派遣した．また，会員小林俊之氏は，７回にわたってソ連へ旅をし独自に“ショティ”の調査をすすめ「ロシアソロバンのルーツを求めて」の著書を著している．

以上のような学会の活動状況であるが，今後の発展を期するために，会員のますますの研究調査活動は当然の事ながら，珠算史を研究しようとする人，珠算史に興味のある人の入会をお待ちしている．

（松　本　　清）

報　　告

水田良温先生算額奉納式

下記の日時，場所において上記の算額の奉納式が行われた．

日時　平成3年5月19日（日）

場所　小田原市大稲荷神社（午後1時開式）および松原神社（午後3時開式）

当日は晴天に恵まれ，午後1時より大稲荷神社において，先ず「算額奉納報告祭」が，宮司によって取り行われ，次に奉納式が行われた．今回の奉納にご尽力された，本学会会員の天野宏氏の除幕から始まり，同氏による経過報告がなされた．祝辞，祝電披露，氏子代表による謝辞で閉式となった．社務所には，本物の算額が置かれてあり，近くで拝見することができた．車で，松原神社へ移動し，同様の儀式が宮司と参列者により行われた．松原神社にはすでに正面に向かって左右に一面ずつ算額が奉納されていた．

参加者は約40名で，算額の研究に熱心な方が多かった．

尚，「式次第」と共に「水田良温先生顕彰算額奉納式賛同者芳名録」も配布された．

（北　邑　一　恵）

図　　書

高山万右衛門著　高橋大人編

『算書 —— 現代訳と解説 ——』

23.5 cm × 17 cm，286 ページ

私家版，平成2年12月発行

群馬の和算の黎明期（18世紀前半）に活躍した和算家のひとりに高山万右衛門重邦（延宝8年〜宝暦4年）がいた．彼は上野国緑野東平井村（現在は藤岡市）の人で，75歳で亡くなる5年前の寛延2年（1749）5月に「算書」と名付けた美濃紙49丁の稿本を著わした。この書は奥書によれば，冨山長兵衛という人に依頼されて書いたのである．冨山長兵衛についての詳しいことは明らかでないが，彼が付けたと思われる表紙に「算書　冨長」と記してあるから，冨山が所蔵していたことは確かである．ところが，「算書」は，その後，上野国山田郡西小倉村（現在は桐生市）の石原勘蔵の所有となり，現在は桐生市立図書館に所蔵されている．

この書は，群馬県内で確認されている著者と著作年月が明記してある和算書の中で，最も古いものであって，群馬の黎明期の和算を調べる上で貴重な文献である．この度，群馬県和算研究会員の高橋大人氏によって「算書」が解読され現代字体で出版されて，容易に利用できるようになったことは誠に有難い。本書の内容の概略は，次の通りである．

- はじめに（4ページ）
- 目次（1ページ）
- 「算書」の原書影印と現代活字（縦組187ページ）

　ここでは，見開きの右ページに原本の影印（10分の8に縮小）を，左ページにその現代字体を記している．問題ごとに編者が番号を付け，全部で134問ある．

　なお，内題を記した1丁分が抜けているのが惜しまれる．また，通貨の単位である分の略字「ト」を，最初の2，3ページは「ト（分)」とし，後は「ト」のみとしてあるが，助詞の「ト」と紛らわしいので，すべて「分」にして欲しかった．

- 問題の現代訳（横組70ページ）

　134問のすべてを現代文に意訳し，計算も洋書に直してある．

　以上が，本書の主要な内容で，他に読者の参考のために，次のような事項がある．

- 群馬における和算書の刊行（横組10ページ）
- 「算書」について（縦組5ページ）

ここでは，134問をいくつかの側面から分析した結果がまとめられている．その一つである「算題の内容」についての分析を記してみる．（　）の中の数字は問題数を示す．ただし，合計が合わない．

1．	物品の売買	(12)	2．	相応和利	(14)
3．	杉成	(3)	4．	差　分	(9)
5．	煙草売買	(9)	6．	勾股弦	(10)
7．	容　術	(19)	8．	積　直	(11)
9．	歩　積	(18)	10．	弧矢弦	(6)
11．	盈　朒	(5)	12．	図　形	(12)
13．	その他	(2)			

◦江戸時代の度量衡等について（6ページ）

度量衡，通貨，用語等について解説してある．

◦群馬における主な和算の門流（1ページ）

◦あとがき（2ページ）

さて，編者の高橋氏は関流八伝高橋吉兵衛富比（明治22年没，89歳）のご子孫で，生家にあった算額題解義の稿本を見出されたのを機に和算の調査・研究を始められた．その成果をすでに『吾妻の算額』(昭和55年)，『石太恒玄圭』(昭和62年）として出版している．その後の研究成果が本書の刊行になったわけであって，氏のたゆまぬご努力に敬意を感じつつ紹介した次第である．

なお，本書を所望される方は，下記（編者宅）宛に，頒価3,000円（送料共）を添えて申込まれたい．

〒377　群馬県渋川市744－26　　ぶなの木書房　　電話 0279－23－5216

（大竹　茂雄）

銭宝琮編　川原秀城訳『中国数学史』

A 5版，418ページ

1990年2月発行，8755円，みすず書房

中国人による中国数学史の本格的研究は，20世紀の初めに李儼（1892—1963）および銭宝琮（1892—1974）によって始められた．2人の研究は，第2次世界大戦後も継続され，1957年に中国自然科学史研究室が設立されると，李儼は室主任となり銭宝琮も室員として研究に従事した．同室は1975年に現在の自然科学史研究所となり，古代数学・天文学史

研究室の数学史組の研究者たちに，中国数学史の研究が受け継がれている．

ところで中国数学史の通史は，まず李儼によって『中国算学史』が1937年に著述された．この本は早くも3年後に，島本一男・藪内清訳『支那数学史』(昭和15年刊）として邦訳された．また銭宝琮も第2次世界大戦前に『中国算学史』上巻を著わしたが完結しなかった．彼の仕事は，自然科学史研究所の数学史組の人たちの協力を得てまとめられ，1964年に『中国数学史』となって出版された．この本が本書原本の初版である．銭宝琮は10年後に亡くなってしまったが，その後この本は，協同執筆者の厳敦傑（1988年没），杜石然，梅栄照の三氏および何紹庚，郭書春両氏の新鋭の研究者によって修訂されて1981年に重版された．

『中国数学史』は，数学史組の研究成果を大成しただけあって李儼『中国算学史』と比べて，質量ともに数段と豊富な内容で，初版以来，中国数学史研究の基本文献として国際的に高く評価されている．このような文献が，中国数学史研究者の川原秀城氏によって翻訳出版され，私たちの座右の書に加えることができて誠に喜びにたえない．そこで本書の概略を紹介して，ひろく推奨する次第である．

まず，本書編纂の史観として，編者は「中国数学史を研究するにはかならず，唯物弁証法と唯物史観の正しい観点によらなければならない」(初版序）と述べている．したがって，この観点に立った論述が随所に見られることは言うまでもない．以下，各章ごとに主な内容を記してみる．

第一編　秦統一以前の中国数学

第一章　秦統一以前の中国数学；本章は，紀元前221年以前の数学について述べた内容で，「先秦時代の数学書で，後世に伝わったものは一冊もないが，≪九章算術≫の方田，粟米，衰分，少広，商功の章は，内容のほとんど大部分が秦以前に生みだされたことは疑えない」と記している．

第二編　秦の統一から唐代中期の中国数学

紀元前221年から755年までが対象である．

第二章　≪九章算術≫の形成とその内容；三元一次連立方程式の元の消去過程に現われた「四籌算図」は，現代の代数学におけるガウスの掃き出し法に相当するもの．正・負数の表示法と加減法則の発見は，数学史上，比類なき偉大な成果であるという．

第三章　趙爽，劉徽から祖沖之，祖暅まで；趙爽（3世紀）の句股図説，劉徽（3世紀）の『九章算術注』，祖沖之（429～500）とその子祖暅の円周率の近似値 22／7（約率），355／113（密率）等々．また『孫子算経』の「物不知数」の問題（いわゆるツル・カメ算）の解法は，現代の一次合同式によるもので，19世紀にヨーロッパに紹介されて「中国剰余定理」と通称された．

第四章　甄鸞から李淳風まで；隋唐の王朝には算学制度があったが，算学博士の官位は最低であり，算学生の学ぶ年数も長すぎたので教育効果を高めることが出来なかった。これを手本にした日本古代の数学教育制度の失敗も宜なるかなである．

第五章　隋唐天文学者の補間公式；僧一行の『大衍暦法』(727)，徐昂の『宣明暦』(822)に使用された補間公式は，ニュートンの補間公式（1670）と完全に一致するもの．

第六章　中国とインドの数学交流；中国数学は，インド数学の位取り式数字，四則演算，分数等々の発展に影響を与え，他方，中国数学は，数字，円弧の量りかた等にインド数学の影響を受けた．

第三編　唐代中期から明代末期の中国数学

本編は，756年から1600年までの844年間という長期間の叙述であり，中国数学が高度な発展をした宋元時代を含む．

第七章　計算技術の改良；珠算術の発生と程大位（1533～?）の『直指算法統宗』による珠算の発展・普及．

第八章　高次方程式の数値解法；賈憲（11世紀）の高次冪の開方，秦九韶（1202～1261）の正負開方術は，基本的にはホーナーの方法と同一である．

第九章〝天元術〞と〝四元術〞；朱世傑（13・4世紀），李冶（1192～1279）による天元術（一元高次方程式の解法）とその拡張である四元術（多元高次方程式の解法）の創造．

第十章〝垜積術〞と〝招差術〞――高階等差級数の研究；沈括（1031～1095），楊輝（13世紀），郭守敬（1231～1316）等の高階等差級数の研究．とくに郭守敬は招差術によって『授時暦』という優れた暦法を作成した．

第十一章　〝大衍求一術〞と宋元数学者の割円術；現代の連立一次合同式および球面三角法の計算．

第十二章　宋元期における中国と外国の数学交流；中国数学はインドを経てイスラム国家に伝わり，イスラム数学の発展に影響を与えた．また中国数学は，早期に朝鮮，日本に伝わり，両国の数学の発展に大きな影響をおよぼした．

第四編　明末から清末の中国数学

本編は1600年から1911年の最後の期間で，西洋数学の輸入，古代数学の復興，中国数学と西洋数学の融合が主な内容．

第十三章　明清の際における西洋数学の伝入；マテオリッチ（1552～1610）をはじめとするイエズス会の宣教師たちと徐光啓（1562～1633）たちによる西洋数学書の漢訳．

第十四章　梅文鼎の数学著述；梅文鼎（1633～1721）の西洋数学の消化吸収と各部門におよぶ二十余種の数学書の著作．

第十五章　≪数理精蘊≫；自然科学を愛好した清朝の康熙帝（1654～1722）の命による西洋数学の編訳書『数理精蘊』の刊行．

第十六章　伝統数学の整理と発展；清朝の乾隆年間（18世紀末）に編さんされた『四庫全書』中の古典数学書についての戴震（1724～1777）たちの校勘の仕事．

第十七章　三角関数の展開式にかんする研究；明安図（1791～1823），項名達（1789～1850）等の三角関数の冪級数展開の研究．

第十八章　戴煦，李善蘭などの数学研究；戴煦（1805～1860），李善蘭（1811～1882）たちの対数関数，指数関数の級数展開の研究．

第十九章　清代末期の数学研究と翻訳活動；華蘅芳（1833～1902）による西洋の代数学，微積分学，確率論等の教科書の翻訳活動．

そして「かくして小学堂から大学堂まで，あらゆる数学課程が一律に西洋で行なわれた教材を採用し，全面的西洋化の道をまっしぐらに走っていく」と述べ，「かかる情況のもと，悠久な歴史を誇った中国古代数学は，清の末年には尋ねる者すらほとんどなく，当然ながらそこにはいかなる発展も存在しなかった」(357ページ）と，中国伝統数学の終末で本書は結ばれている．

さて，訳者の川原氏は1984年8月から1年間，北京の中国科学院自然科学史研究所に留学されて，中国数学史を研究された方である．訳者は留学中に本書の邦訳を手掛けられたようで，翻訳に際し，原編者の杜石然氏をはじめとする研究所の諸氏から教授を受けたと「訳者あとがき」で述べている．また「凡例」によれば，古典からの引用文については，可能な限り原典にあたって確認され，その原文を訳注として記している．したがって注は39ページにわたる膨大な量である．しかも400ページを超える大部な書なのに，誤植は数字など極めて僅少である．訳者のご努力に敬意を表してやまない．

おわりに，敢えて訳文について述べれば，漢語として一般になじんでいない中国語を，そのまま使っている点が目立つ．たとえば頻繁に使われている語の中から挙げると，生卒（生没のこと），生平（生涯のこと）等である．なお「灯」を「灯籠」と訳されたが（264ページ），これは「行灯」とした方が適切と思われる．

（大竹　茂雄）

編集後記

129号の編集は5月のゴールデンウィーク中に終了しましたが，5月6月は学会が多く，初稿刷が届いてから印刷所にもどすまでに少々手間取ってしまいました．

昨年秋から「和算研究会」というグループを作り，東京在住の人に呼びかけ勉強会を開いていましたが，20名ぐらいの出席が見込まれるようになりましたので，4月から「和算セミナー」を本会の行事としてスタートさせました．講師は下平会長はじめ本部の役員が担当しておりますが，なにぶん受講料も頂戴しておりませんから謝礼もなしで引き受けていただいております．

会費の値上げが，会員の増加かの問題があります．各種の数学教育の研究大会で，数学史や和算に関係のある発表があります．発表者の中には本会の会員でない方もかなりおりますし，セミナーの参加者には本会の会員でない方も多いので，おさそい下されば幸いです．

入会申込書などは運営委員長の佐藤健一へ連絡していただければ，お送り致します．

（文責　佐藤健一）

今年度の編集委員は以下の通りです．

◦佐藤健一，西田知己，蔵持信朗，杉内智幸，北邑一惠，中山陽子，上野尚亨，塚原久美子

数　学　史　研　究

通　巻　129号（1991年4月～6月）

発行所　日　本　数　学　史　学　会

〒161 東京都新宿区下落合1丁目7番7号

富士短期大学科学史研究室

電話　東京(03)3368－8826番（出版部）

会　費　年額　7,000円

振　替　東京2－20022番

印刷所　ト ー コ ー ワ イ ス

〒260 東京都新宿区矢来町43

電話（03）－3260－7824番

ISSN 0386-9555

SŪGAKUSHI KENKYŪ

JOURNAL OF HISTORY OF MATHEMATICS, JAPAN

NO, 129

April－June, 1991

CONTENTS

Edited and Published by
The History of Mathematics Society of Japan
Fuji Junior College
1-7-7, Shimo-ochiai, Shinjuku-ku, Tokyo, 161, Japan

数 学 史 研 究　　(通巻 129 号)　平成 3 年 6 月 25 日
東京都新宿区下落合1-7-7　　電 話 (03) 3368-8826　日本数学史学会