ISSN 0386-9555

数学史研究

（通巻136号）

1993年1月～3月

目　　　次

論　　　説

和算の未解決な組み合わせ問題について ……………… 奥村 博・深川 久 …… 1

『弧矢弦叩底』の第1問について ……………………… 田中　　充 …… 11

賈逵の月行遅疾論 ……………………………………… 大橋　由紀夫 …… 29

落　穂　集 …………………………………………………… 42

図　　　書 …………………………………………………… 44

会　　　報 …………………………………………………… 46

編 集 後 記 …………………………………………………… 47

日本数学史学会

論　　説

和算の未解決な組み合わせ問題について

奥村　博・深川　久

1．はじめに

和算には方陣のような組み合わせ論的な問題が多くあるが，算額に見られるほとんどの問題は，幾何学に関するものであり，組み合わせ論的な問題はほとんど見当たらない．しかしながら，次に挙げる『数理神篇』下巻に記録されている群馬の算額題は，和算後期に多くみられる接する円を扱った問題でありながら，その中身は組み合わせ論的色彩の濃いものであり，異色である［4; p.98］，［6］．

今有如図方内容大円一個小円八個大円及小円不変此規而其顕図変形問件件幾何．

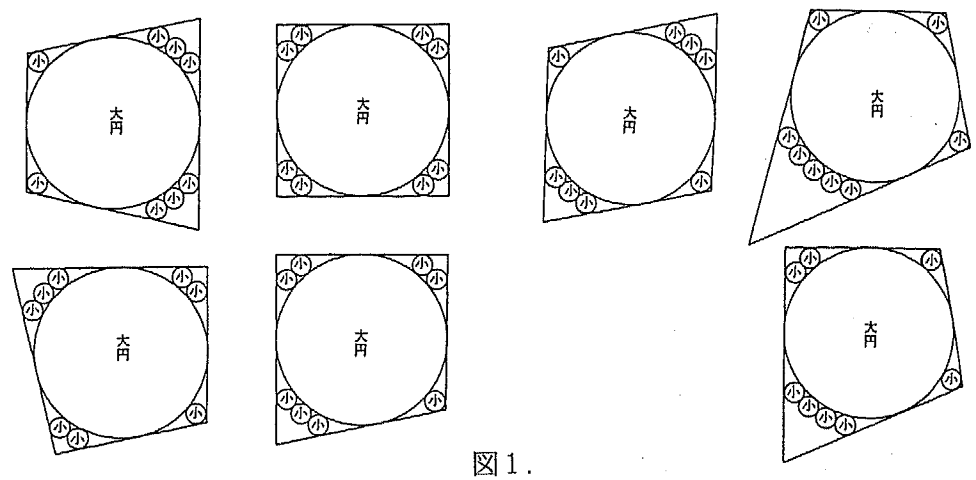


図1．

和算の習慣として，問題の詳細については，図より判断しなければならないが，問題文に現れない部分を補足すると，この問題は次のように述べることができる．すなわち，四角形の内接円と隣り合う二辺の間に内接円に外接しながら順次外接する合同な小円を入れる．ただし，はじめの小円は二辺のうちの一辺に，最後の小円は残りの辺に接しているものとする．このとき，これら合同な小円の総数が8個であるとき，同じ小円と内接円を用いるとき，合同な図は同一視して，このような図が何通り作図できるか．術分は7通りで

あるとしているが，[12] では8通りであることが指摘されている．

これより早く，このような図形を扱った問題に『温知算叢』の第10問と11問がある [7]．『温知算叢』の第10問は，三角形とその内接円をつくる3個の隙間に総数6個の合同な小円を入れ，内接円と小円の直径の関係を問う問題である．同第11問は，四角形とその内接円のつくる4個の隙間に総数10個の合同な小円を入れ，内接円と小円の直径の関係を問う問題である．福田理軒が『東京数学会社雑誌』36号（1881）に提出した問題は，多くの文献で取り上げられているが [3]，[9]，[11]，[12]，これは『温知算叢』第11問の図が，『数理神篇』の問題のように数種類作図できるので，大円と小円の直径の関係をそれらの図について一般的に求めよというものである．

長谷川寛の『算法極形指南』巻三には『温知算叢』の2問の解義がある [1]．林 [9] はこの解について極形術を用いているゆえに，否定的な評価を下しているが，本稿でこれらの解に誤りがないことを示す．また従来これらの問題との関連性を指摘されなかった算額題などにも触れ，これらの問題に共通な図形的性質を明らかにする．『数理神篇』の問題の一般解を与えることは，未解決のまま今日に至っている．本稿では，この一般解も与える．

2．岩手の算額題

岩手の算額に明治5年提出の次の問題がある [2; p.54]．
今有如図大円洩二斜画小円六個小円径一寸問大円径幾何（図2）．

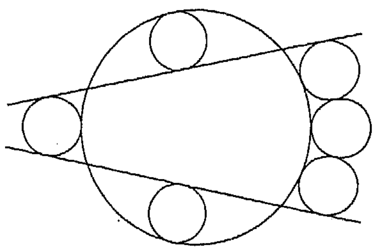


図2．

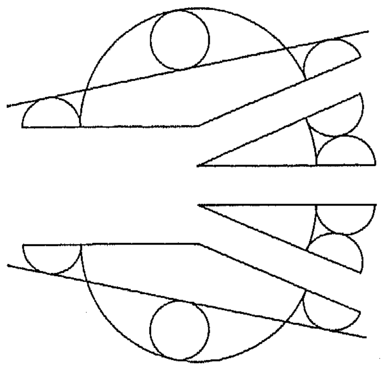


図3．

問題文では触れていないが，この図で，二つの弦はその中点で小円に接していると解釈すべきだろう．この前提の下に，大きさの等しい6個の小円の直径を知って大円の直径を求める問題である．術文では，大円の直径は小円の直径の4倍であるとしている．ところ

で，この問題の図を図3のように分解し，組み直すと図4が出来上がる．よって，術文は自明のものとなる．

明治13年提出の同じ岩手の算額題に，図5を論じたものがある [2; p.93]．この図についても同様の変形により，大円と6個の小円の直径の比は4:1であることがわかる．

さて，次にこの問題を一般化してみよう．図6においては，例として定円とその3本の弦による図を挙げてみた．この図では3個の弦の中点で接している円の大きさは異なり，それらの比は0:1:2である．半径0の円に接する弦は定円の接線となることに注意しよう．これについても，一度この図が作図できると，同じ円を用いて，小等円の総数はそのままに，弦に挟まれる小等円の数を変化させて作図することができることは，岩手の算額題の場合と同じように，図形を分割して組み直せることから明らかである（図7）．すなわち，このような図は，スタイナーの環円問題や，ポンスレーの閉形定理のような性質をもっているわけである．以上の注意より，『温知算叢』や『数理神篇』の問題の図形は，定円の弦の中点で接する円がみな点円となった場合のものであることがわかる（図1）．

以上の議論をふまえると，福田の問題と『温知算叢』の問題は同じものであるといえよう．

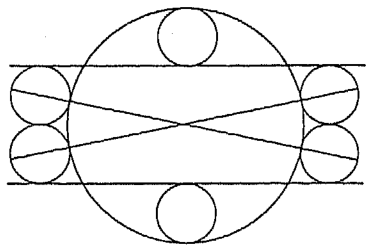


図4．

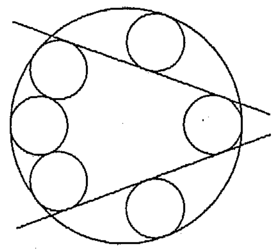


図5．

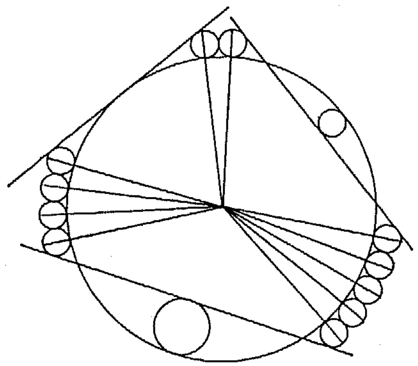


図6．

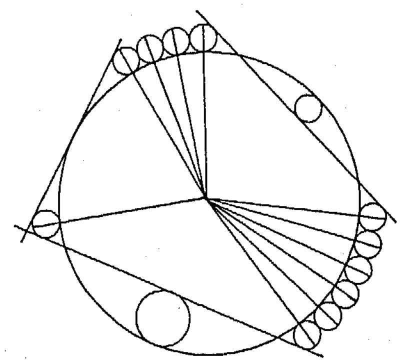


図7．

3．『算法極形指南』の解と林鶴一の解説

この節では，『温知算叢』の問題に対する，『算法極形指南』の解法とそれに対する林の評価 [9] について述べる．先ず，林のこれらの問題に関する解説で極形術に関する部分を述べよう．彼は，半径 R の内接円をもつ凸 n 角形を考え，この多角形と内接円の作る n 個の隙間に総計 N 個の合同な半径 r の小円が入っているとし，それぞれの隙間に入っている小円の個数を m_i（$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n=N$，$m_i \geqq 1$）として，N，R，r，n の関係式

$$\frac{N}{n}\sin^{-1}\frac{r}{R+r}=\frac{\pi}{n}-\cos^{-1}\frac{R-r}{R+r}+\sin^{-1}\frac{r}{R+r}$$

を求めている．そしてこの式より，r は m_1，m_2，…，m_n の組み合わせによらず一定であり，長谷川派の解法はこのことを無断で用いていると述べている．さらに，『算法極形指南』の解は極形術によるものにして首肯し難しとも述べている．

林の前者の指摘であるが，我々が 2 節で述べたことより，このような式の計算によらずとも，n が固定されていれば，r，R と N の関係は m_1，m_2，…，m_n の組み合わせによらず一定であることは明らかである．

次に後者の指摘についてであるが，我々は，『算法極形指南』の解は林が述べているように極形術を用いてはいないことを示す．そのために，極形術の方法を簡単に述べておこう．極形術の問題点は次の 2 点に要約できる．例えば図形的要素 a，b，c，d の関係を求める場合，極形術では例えば $a=c$，$b=d$ のように，これらが等しくなるような対称的な図形を考え，これより $a=c=x$，$b=d=y$ についてのある関係式 $f(x, y)=0$ を得る．この式に還原と称して，例えば $x=(a+c)/2$，$y=(b+d)/2$ のような対称式を代入して最終的な関係式を得る．しかしながら，対称的な図と，もとの図の図形的な要素の間のメトリックな関係が同じであるとは限らず，論理性を欠くといわれてきた．さらに，環原で代入する対称式を無数にある対称式のなかから特定する根拠に欠け，この部分も批判の的になっていた．

さて，今我々が考えている問題に限っては，『算法極形指南』で考えている対称的な図は，正三角形と台形であるが，これらは 2 節におけるものと同様に，もとの図より m_1，m_2，…，m_n の組み合わせを変えて得られ，r，R と N の関係はもとの図と同じである．また，この場合，三角形や四角形の辺の長さは等しくなるが，r，R と N のなかには等しくなるものはないことに注意しよう．それゆえ，式変形において還原を行うことはできないわけである．実際に式変形を観察してもそのような操作は行われておらず，これらの解は極形術を用いていないことがわかる．それゆえ，これらの解には極形術を用いているゆえの欠点もない．

『算法極形指南』の解における対称的な図が，我々の 2 節におけるような議論を念頭において得られたものか否かはわからない．我々の結論は，これらの解が誤っていると断定する根拠はどこにもないということである．

4．『数理神篇』の問題の一般化

『数理神篇』の問題を厳密に述べたものは見当たらない．よって，我々はこれを次のように一般的にかつ厳密に述べておく．

m 個の直線 l_1，l_2，…，l_m（$l_{m+1}=l_1$）がこの順に円 C_0 に接しているとする．n 個（$m \leqq n$）の合同な円

$$C_{1_1},\ C_{1_2}, \cdots,\ C_{1_{k_1}};\ C_{2_1},\ C_{2_2}, \cdots,\ C_{2_{k_2}};\ C_{3_1},\ C_{3_2}, \cdots,\ C_{3_{k_3}}; \cdots, C_{m_1},\ C_{m_2}, \cdots, C_{m_{k_m}}$$

（$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$）がこの順に C_0 に外接しているとする．ただし，C_{i_s}，$C_{i_{s+1}}$，は互いに外接し，C_{i_1}，l_i に接し，$C_{i_{k_i}}$ は l_{i+1} に接しているものとする．このとき，k_j，（$k_j \geqq 1$，$j=1$，2，…，m）を変化させるとき，合同なものを除いて，条件を満たす図形は何通りできるか，その総数 $N(m, n)$ を求めよ。

このように述べると，直線 l_1，l_2，…，l_m が凸多角形をなさない場合も含まれることに注意しよう．

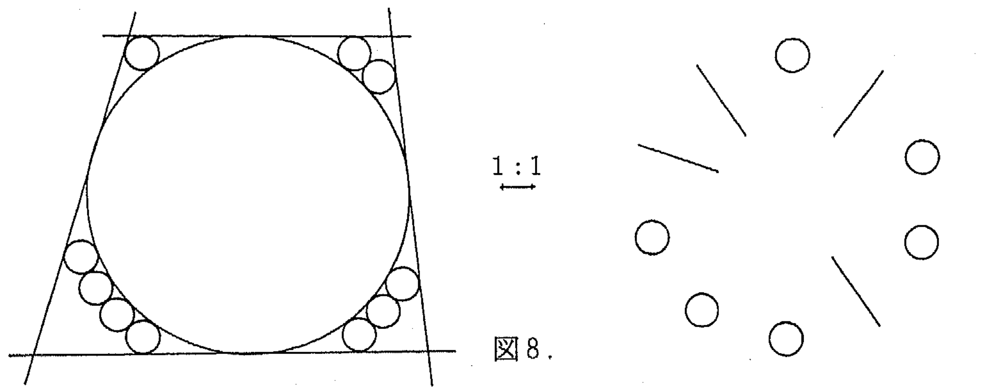


図 8．

我々の問題の図形では，隣り合う 2 直線とそれらによって決まる円 C_0 の弧の作る三角形には少なくとも 1 個の円 C_{jk} が入るが，この図形のそれぞれの三角形から 1 個ずつ C_{jk} を除いてから，残りの直線と C_{jk} を円形に並べたものと，我々の図形は 1 対 1 に対応しているから（図 8），$N(m, n)$ は m 個の直線と $n-m$ 個の小円を並べてできる円順列で裏返して重なる順列は同一視したもの，すなわち，数珠順列の総数に等しいことになる．

この注意により，次の定理は明らかである．

定理１． $N(m,\ m+n)=N(n,\ m+n)$.

5．Pólyaの定理

一般的に n 個の要素からなる集合 $D=\{1,2,3,\cdots,n\}$ の要素を m 個の色 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_m$ で塗り分けるとき，何通りの塗り分け方があるかを考えてみよう．塗り分け方全体を集合と考え，これを C とする．C の要素は，D から $R=\{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_m\}$ への写像と考えることができる．A を D 上の置換群とし，$f,\ g$ を C の要素とするとき，任意の D の要素 d について $f(d^{\alpha})=g(d)$ となる A の要素 α が存在するときにかぎり，f と g は同じ塗り分け方であると考える．ただし，$f(d)$ と d^{α} をそれぞれ，$f,\ \alpha$ による像とする．f と g が同じ塗り分け方であるとき，$f\sim g$ と定義するとこれは同値関係であり，この関係によって C を類別するときの，同値類の個数が塗り分け方の総数となる．

R の要素 r に順序のついた負でない整数の組み $w_1r,\ w_2r$ を対応させ，r の重みと呼ぶ．C の要素 f に対してその重み $w(f)$ を次の式で定義する．

$$w(f)=\prod_{d\in D}x^{w_1f(r)}\,y^{w_2f(r)}$$

このとき $f\sim g$ であるとき，$w(f)=w(g)$ となるので，C の同値類の重みをその要素の重みと定義し，重みが x^my^n である同値類の個数を C_{mn} とする．また，重みが $m;\ n$ である R の要素の個数を c_{mn} として，$c(x,y)=\Sigma c_{mn}x^my^n$ とする．

A を d 次の置換群とするとき，A の巡回指数 $Z(A)$ を d 個の変数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_d$ の多項式としてつぎのように定義する。

$$Z(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\prod_{k=1}^{d}a_k^{\lambda_k(\alpha)}$$

ただし，$|A|$ は A の位数であり，$\lambda_k(\alpha)$ は α を互いに共通文字を含まない巡回置換の積に分解するときの長さ k の巡回置換の個数である．C_{mn} と c_{mn} の関係は巡回指数を仲介にして次の定理によって与えられる（これについては，グラフ理論または組み合わせ論の成書，例えば，[5]，[8] を見よ）．

定理２．（Pólya）．

$$\sum C_{mn}x^my^n=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\prod_{k=1}^{d}c(x^k,y^k)^{\lambda_k(\alpha)}.$$

6．一般化された『数理神篇』の問題の解

さて，我々の問額は，n 個のビーズの玉からなるネックレスのうちの m 個のビーズを直線という色に，残りの $n-m$ 個を円という色に塗り分けるときの塗り分け方の総数を求める問題である．ビーズ玉に１から n までの番号をつけ，$D=\{1,2,\cdots,n\}$ とし，$R=$ {直線，円} とし，円の重みを１，０とし，直線の重みを０，１とする．n 個のビーズのうちの $n-m$ 個を円という色に，m 個を直線という色に塗り分ける方法は，D から R への写像として重み $x^{n-m}y^m$ をもつ．

n 個のビーズからなるネックレスの置換群は，２面体群 D_n であるが，D_n の巡回指数に関しては，次の式が与えられている [8; p.184]．

$$Z(D_n)=\frac{1}{2n}\sum_{k|n}\phi(k)\,a_k^{n/k}+\begin{cases}\frac{1}{2}a_1a_2^{(n-1)/2} & (n\text{が奇数のとき})\\ \frac{1}{4}(a_2^{n/2}+a_1^2a_2^{(n-2)/2}) & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}$$

ここに，$\phi(k)$ はオイラー関数，すなわち k 以下の k と素な自然数の個数であり，$k|n$ は k が n の約数であることを示す．よって，Pólyaの定理より

$$\frac{1}{2n}\sum_{k|n}\phi(k)(x^k+y^k)^{n/k}+\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)(x^2+y^2)^{(n-1)/2} & (n\text{が奇数})\\ \frac{1}{4}\{(x^2+y^2)^{n/2}+(x+y)^2(x^2+y^2)^{(n-2)/2}\} & (n\text{が偶数})\end{cases}\qquad(1)$$

を展開したときの $x^{n-m}y^m$ の係数が $N(n,\ m)$ となる．

$(n-m,\ m)=(n,\ m)$，$\binom{n/k}{(n-m)/k}=\binom{n/k}{m/k}$ に注意すれば，(1)の右辺の第１項を展開するときの $x^{n-m}y^m$ の係数は，

$$\sum_{k|(n,\ m)}\phi(k)\binom{n/k}{m/k}\qquad(2)$$

である．ただし，$(m,\ n)$ は m と n の最大公約数である．

次に，$(x+y)(x^2+y^2)^{(n-1)/2}$ を展開したときの $x^{n-m}y^m$ の係数を求めれば

$$
\begin{cases}
\dbinom{(n-1)/2}{(n-m-1)/2} = \dbinom{(n-1)/2}{m/2} & (m\text{ が偶数，}n\text{ が奇数のとき}) \\[2ex]
\dbinom{(n-1)/2}{(n-m)/2} = \dbinom{(n-1)/2}{(m-1)/2} & (m,\ n\text{ ともに奇数のとき})
\end{cases}
\tag{3}
$$

となる．これ以外の場合のこの項の係数は0となる．

また，$(x^2+y^2)^{n/2}$ を展開したときの $x^{n-m}y^m$ の係数は次のように求まる．

$$
\binom{n/2}{m/2} \qquad (m,\ n\text{がともに偶数のとき}) \tag{4}
$$

これ以外の場合はこの項の係数は0となる．

また，$(x+y)^2(x^2+y^2)^{(n-2)/2}$ を展開したときの $x^{n-m}y^m$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&\binom{(n-1)/2}{(n-m-2)/2} + 2\binom{(n-2)/2}{(n-m-1)/2} + \binom{(n-2)/2}{(n-m)/2} \\
&= \binom{(n-2)/2}{m/2} + 2\binom{(n-2)/2}{(m-1)/2} + \binom{(n-2)/2}{(m-2)/2}
\end{aligned}
$$

であり，次のように求まる．

$$
\begin{cases}
2\dbinom{(n-2)/2}{(m-1)/2} & (m\text{ が奇数，}n\text{ が偶数のとき}) \\[2ex]
\dbinom{(n-2)/2}{m/2} + \dbinom{(n-2)/2}{(m-2)/2} & (m,\ n\text{ ともに偶数のとき})
\end{cases}
\tag{5}
$$

これ以外の場合のこの項の係数は0である．

(1)，(2)，(3)，(4)，(5)より $N(n, m)$ は次のように求められる．

定理3．

$$
N(n, m) = \frac{1}{2n}\sum_{k|(m,\ n)} \phi(k)\binom{n/k}{m/k}
$$

$$
+\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\dbinom{(n-1)/2}{(m-1)/2} & (m,\ n\text{ が奇数のとき}) \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dbinom{(n-2)/2}{(m-1)/2} & (m\text{ が奇数，}n\text{ が偶数のとき}) \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dbinom{(n-1)/2}{m/2} & (m\text{ が偶数，}n\text{ が奇数のとき}) \\[2ex]
\dfrac{1}{4}\left\{\dbinom{n/2}{m/2} + \dbinom{(n-2)/2}{m/2} + \dbinom{(n-2)/2}{(m-2)/2}\right\} & (m,\ n\text{ が偶数のとき})
\end{cases}
$$

$N(m, n)$ の表を次に挙げる．空欄は，図形の存在しない部分である．

m＼n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
3		1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27
4			1	1	3	4	8	10	16	20	29	35	47	56	72	84	104
5				1	1	3	5	10	16	26	38	57	79	111	147	196	252
6					1	1	4	7	16	26	50	76	126	185	280	392	561
7						1	1	4	8	20	38	76	133	232	375	600	912
8							1	1	5	10	29	57	126	232	440	750	1282
9								1	1	5	12	35	79	185	375	750	1387
10									1	1	6	14	47	111	280	600	1282
11										1	1	6	16	56	147	392	912
12											1	1	7	19	72	196	561
13												1	1	7	21	84	252

$N(m, n)$ の表

7．おわりに

我々の議論をまとめると次のようになる．『温知算叢』，『数理神篇』，福田理軒の問題にある多角形とその内接円の隙間に合同な小円を入れる図形は，小円の個数の組み合わせを変えても内接円と小円の半径の関係は不変であるが，このことは，図形的に簡潔に示せる．『算法極形指南』にある『温知算叢』の問題の解法を誤りとする根拠はない．『数理神篇』の問題の一般解は Pólya の定理を応用することにより求めることができる．

我々が考えてきた問題で，残されている部分に触れておこう．[10] によると，村瀬喜作孝昭が関孝和没後150年に際して発表した問題には，$m=4$，$n=6$ のとき，C_0 と C_{jk} の比が7：1となることが述べられている（村瀬は4直線が菱形をなす場合を述べている）．証明も [10] でなされている．この例のように，C_0 と C_{jk} の比が有理数になるものを決定することは，今後に残された問題である．直線が m 個で，C_{jk} が n 個からなる図形を $[m, n]$ とすれば，我々が知り得ているもので C_0 と C_{jk} の比が有理比になるものは，村瀬のものも含めて次のようになる．

[1, 2] 1:4，　[1, 4] 1:1，　[2, 2] 1:1，　[2, 4] 2:1，　[3, 3] 3:1，　[4, 6] 1:7．

これらについての証明は，なかば自明のことなので，省略する．

[9] では，直線 l_1，l_2，…，l_m のなす図形が凸多角形になる場合とそうでない場合を区別して論じている．しかしながら，この議論は，ごく小数の例に限ってなされているだけ

であり，大多数の場合についての検討は，今後に残された問題である．
最後に，図１は編者の許可を得て［４］のものを使用させていただいた．編者の方々にお礼申し上げたい．

参考文献

1．秋田十七郎義蕃『算法極形指南』巻三，1836.
2．安富有恒『和算―岩手の現存算額のすべて』青磁社，1987.
3．小曽根淳，道脇義正「斉藤宜義（和算家）の一問題について」群馬大学地域論集第５巻，(1986)，68-73.
4．群馬県和算研究会『群馬の算額』群馬県和節研究会，1987.
5．D. I. A. Cohen “Combinatorial theory ”, John Wiley and Sons 1978.
6．斉藤宜義『数理神篇下』1860.
7．白石長忠『温知算叢』1828.
8．F. Harary “Graph Theory ”, Addison-Wesley 1969.（池田貞雄訳『グラフ理論』共立出版，1971）
9．林 鶴一「福田理軒ノ一問題」『林鶴一博士和算研究集録』下巻，東京開成館，1937，862-869（「東京物理学校雑誌」531号（1936）からの転載）．岩田至康『幾何学大辞典』（補巻１）槙書店，1988，342-348にも転載有り．
10．T. Hayashi and A. Shinomiya “The Problems Dedicated by Gokai and his Disciples, to Seki on the Occasion of the One-hundred-fiftieth Anniversary of the Latter’s Death ” 『林鶴一博士和算研究集録』（下巻），東京開成館，1937，701-712（「Tōhoku Math. Journal」vol.12（1917）からの転載）．
11．平山 諦『和算史上の人々』富士短大出版部，1965.
12．道脇義正「福田の問題について―和算の幾何学」「数理科学」no.139（1975），104-107.

（平成４年５月30日受理）

論　説

『弧矢弦叩底』の第一問について

田　中　　充

１．始めに

杉浦によれば「和算の微分法は多項式の組立除法（テーラー展開）から生まれ，冪級数に形式的に拡張されたものである.」[1)]

また，加藤によれば，『円理綴術』には20個の級数をあげ，その作り方を説いているが，その第１の級数は解を示してなく，『弧矢弦叩底』ではそれがやはり第１に掲げられ証明があるとのことである.[2)]

以下を辿ることによって，杉浦の言のような方法を骨子とし，しかも円理の知識がいわば“標準化”されて普及していく“一斑”がうかがえるのではあるまいか．

『弧矢弦叩底』は，美濃の国の僧「忍澄」が，文政元年に著した「円理」の書物である．（文政２年刊）．題簽には，「円理真術」の四文字を割り書きにして円で囲んだものの下に「弧矢弦叩底」と書いてある．

「上」，「下」の２冊から成り，上巻には「問い」と「術」が，下巻には，一部を除いた上巻の解がある．

主要な「問い」は30題で，次のようになっている．

まず，直径と弦とを与えて弧と矢と面積とを問う．これには各々二つの解を付けている．従ってこれで３問６答となる．

以下，直径と矢とを与えて弦と弧と面積とを問う，といった工合で30問42答．

その後に「円周術」（自叙と目録には「円満術」）があって，直径を与えて周と面積とを問う．これには周に４答を与えてある．

最後に「雑部七条」として普通の算書の付録にあるような算題が７問．

そして，上巻には「問い」と「術」，下巻には最後を除いた「解」がある．

最初の30題と解とで一通りまとまった「円理」の記述になっており，殊に最初の第一問が本書の「全般」をうかがうのに便利であると思うので，先ず本篇はそれを調べ，また，用いられている綴術の手順の復元を考えてみた．

2．第一問の「問い」と「術」

第一問の「問い」と「術」とを次に示す．ただし，書き下し文にし，仮名遣いを改め，「分かち書き」となっている部分は括弧〔　〕に入れることにする．

第一　径〔若干〕弦〔若干〕　　　〔大小〕弧ヲ問ウ

術ニ云ウ　径ヲ以テ弦ヲ除シ之ヲ自シ〔率ト名ク〕　弦及ビ一冪ヲ乗ジ〔二除　三除〕シテ一差ト為ス　率及ビ三冪ヲ乗ジ〔四除　五除〕シテ二差ト為ス　率及ビ五冪ヲ乗ジ〔六除　七除〕シテ三差ト為ス〔四差以下之ニ倣ッテ之ヲ求ム　○下各術之ニ准ジテ註文ヲ略シ　例ノ如シ　ト曰ウ〕

諸差ニ弦ヲ加エ小弧ヲ得　以テ円周ヲ減ジ〔径ニ依リ別ニ周ヲ求ム〕大弧ヲ得テ各々問イニ合ウ〔別術ニ云ウ　第二術ニ依ッテ〔大小〕矢ヲ求メ　矢径ニ依ッテ第五術ノ如クシテ弧ヲ得ルモマタ可ナリ〕

3．下巻の第一術起〔1〕

前述のように下巻は解義だけから成っている．殊に第一術起は，下巻全体16丁のうち6丁半を占めている．挿絵があって〔図1〕，概略つぎのような説明から始まる．

以下，「　」内は原文を意味をとって書き下したものである．

「先ず弦と径とから弧背長を求めるには，弧の中に二等辺三角形を内接させ，等辺（の長さ）を甲（斜）と名付ける．次に甲を底辺とする二等辺三角形を弧に内接させ，等辺を乙（斜）と名付ける．以下このようにして辺の数を2倍2倍と増して行く．このとき内接辺と弧背とが近づくことは明らかである.」

だから，ここではあくまで弧を等分して行くやり方を述べている．第一術のみならず本書はすべてそうである．さらに説明を続けて

「弦と径とで甲を求め，甲と径とで乙を求め，その乙と径とで丙を求め，順次そのようにして行くのであるが，甲を求めるにも次に乙を求めるにも皆開平方があって繁雑であるとともに端数を生じてしまう．だからその平方を綴術を用いて開けば何回続けてもその象は変わらず，ただ分母子の象が異なるだけである．

このようにして仮に諸商を求め，ついで『分母子の極数』を探り求めて真の級数を得る.」

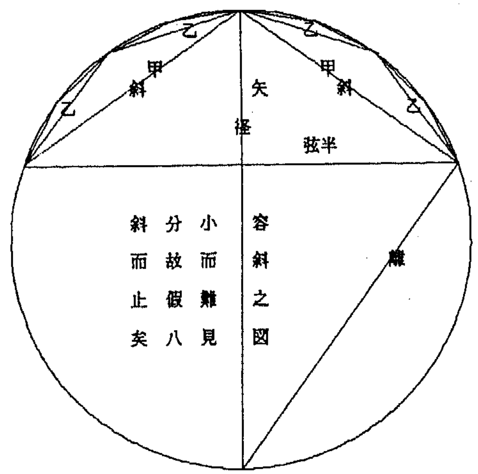
ここには二つのことが述べてある．

ひとつは，2次方程式を解くのに綴術を用いること．（この綴術は狭義である．ここでは2項展開法に当たろうか.）

もうひとつは，内接辺の和の級数を始めの数項づつ（実際には4項づつ）求め，係数の極限を推定することによって真の弧背長を表す級数を数項（実際には4項）求め，その数項から，続くすべての項を求めて真の値に達する，ということである．

もっとも，これらの方法は本書の独創ではなく，[3] 本書は『要領よくまとめた書物』という特徴を持つ．

〔図1〕



4．下巻の第一術起〔2〕

これから，原文を真似て和算風の式を書くにつき，いくつかお断りしておきたい．

① 式番号のうち，（木），（火），（金）は原文では○の中に木などである．

② 数係数で一部算木式の数字で表されていたものは改めた．

③ 方は，本書ではすべて法でなくこれを用いているので従った．

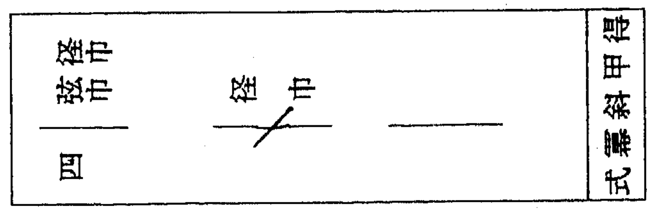
④ 巾は，式中で用いている．本文中ではこれよりやゝ複雑な略字なので冪にした．

⑤ 才は再と改めた．（③と矛盾するが才では略しすぎと感じたので）

⑥ 廉は“まだれ”を用いてあるが字体が無いので“廉”とした．本文では廉．

これ以後も，おおよそそのようにするので了承を得たい．これらは横位置，縦書きにしたが，原文では縦位置であることは言うまでもない．

さて，三平方の定理と相似とで甲冪を未知数とする次の2次方程式を得る．



(1)

現代的には

$$\frac{弦^2 径^2}{4} - 径^2 甲^2 + (甲^2)^2 = 0 \qquad (1)'$$

と書けようか．以後も現代的の式を書き添えることがあるがいちいち断らない．さて

「(1次の係数が負で) 2次の係数と定数項とが正だから2個の正の実数解がある．うち小さい方は甲冪で大きい方は図の離冪である．そしてこの方程式を綴術平方に開けば，小さい方の解すなわち甲冪が得られる.」

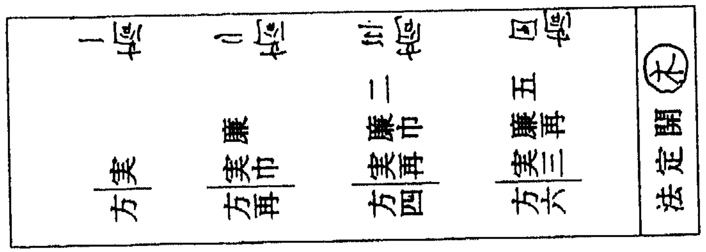
これは和算的には周知のことなのであろう．現代的に言えば，2次方程式の解の公式の複号のプラスをとれば離冪，マイナスを選べば甲冪ということである．

「さて，綴術に開くことは難しくはないが口伝えでないと紛れやすいので，ここでは定法を立てて示すだけにする．強いて綴術を知ろうとしたら師について知るのが良く，自分 (忍澄) が秘しているのではない.」

原文をたどると，以上のような訳で，実と廉とが正，方が負であることを前提として，2次方程式

$$実 + 方 \times x + 廉 \times x^2 = 0 \qquad (2)$$

に当たるものを綴術に開いた結果としてその4項までを示してある．



(木)

$$x = \frac{実}{方} + \frac{実^2 廉}{方^3} + \frac{2実^3 廉^2}{方^5} + \frac{5実^4 廉^3}{方^7} \qquad (木)'$$

しかし，寧ろ，実，方，廉ともに正として

$$実 - 方 \times x + 廉 \times x^2 = 0 \qquad (2)'$$

を対象とした，と見た方が分かりやすい．

これを (木) と名付けて，繰り返し使用している．

この公式 (木) は，2次方程式 (2)′ を解の公式を用いて解き，複号のうちマイナスを採って，根号の部分を "実" について2項展開し，実について4次まで，従って第4項までとったものと一致する．

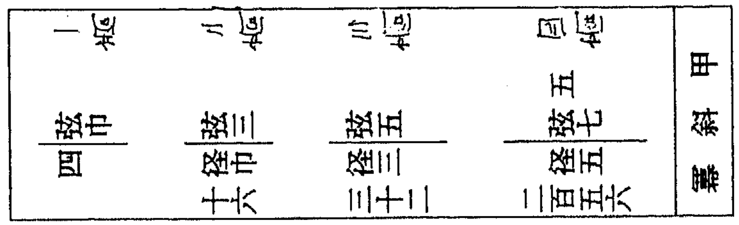
公式 (木) を用いて，すなわち

(木) の実，方，廉をそれぞれ $四\left|\begin{matrix}弦径\\巾巾\end{matrix}\right.$，$\left|\begin{matrix}径\\巾\end{matrix}\right.$，一 として甲斜冪が得られる．

この付近のことを原文では

「○今實ハ弦冪径冪相乗ヲ四除メ正ナリ方ハ径冪負ナリ廉ハ一正ナリ以テ開定法ヲ解キ甲斜冪トス」

と述べている．



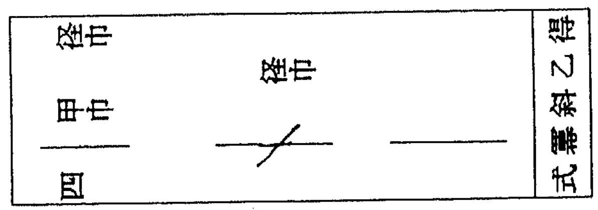
$$甲斜冪 = \frac{弦^2}{4} + \frac{弦^4}{16径^2} + \frac{弦^6}{32径^4} + \frac{5弦^8}{256径^6} \qquad (3)$$

この甲斜冪も (木) も第4項まで求めて止めてある．これについて

「今，四商 (第4項) までで止めた．この四商までを用いて五商以下を求める方法は後で出す．求めようとしたらそれに准ずるがよい．今は必要がないから略す.」

と言っている．この，第4項までで処理するのが本書の構成上面白いところである．

そこで早速次を見よう．



(4)

$$\frac{甲^2 径^2}{4} - 径^2 乙^2 + (乙^2)^2 = 0 \qquad (4)'$$

が乙斜冪を求める二次方程式であるが (1) にくらべて定数項が

$$四\left|\begin{matrix}弦径\\巾巾\end{matrix}\right. \rightarrow 四\left|\begin{matrix}甲径\\巾巾\end{matrix}\right.$$

と変わっているだけである．だから，(1) で "弦巾" を "甲巾" に変えて解けばよいが，

その計算を実行してみると　16項で $\dfrac{c^{32}}{d^{30}}$ の項まで現れる．

（ここで　c=径，d=径）

その煩を避けて，と言うより既に述べたように「綴術を用いて開けば何回続けてもその象は変わらず」と綴術を用いて２次方程式を解く．今度は定数項の因数である甲斜冪が４つの項から成り立っていることに注意せねばならない．

そのため，（火）と名付ける公式を示しており，それは“方”だけを負として，というよりは，前の(2)′のところで述べたように，文字定数をすべて正として

$$(\text{一実}+\text{二実}+\text{三実}+\text{四実}) - \text{方}\times y + \text{廉}\times y^2 = 0 \qquad (5)$$

を“綴術に開いた”（一実～四実はそのまま使われている）ものである．

(1)を（木）よりもっと精密な公式を用いて，四商で止めず五商，六商……と求めてあったらばここで五実，六実……があるものを解かねばならぬことになり，かなり大変であろう．４項づつで計算を進めていくことの便利さが，まずここに現れた．

㊋一実二実等列ル開定法　　（火）

一	二	三	四
一実/方〔一・一〕	二実/方〔一・二〕	三実/方〔一・三〕	四実/方〔一・四〕
	一実巾廉/方再〔二・一〕	一実二実廉二/方再〔二・二〕	一実三実廉二/方再〔二・三〕
		一実再廉巾二/方四〔三・一〕	一実巾二実廉巾六/方四〔三・二〕
			一実三廉再五/方六〔四　〕
			二実巾廉/方再〔五　〕

（この式の〔　〕とそのなかの数字は後の必要のため筆者がつけた.）

$$y = \frac{\text{一実}}{\text{方}} + \frac{\text{二実}}{\text{方}} + \frac{\text{三実}}{\text{方}} + \frac{\text{四実}}{\text{方}}$$
$$+ \frac{\text{一実}^2\,\text{廉}}{\text{方}^3} + \frac{2\,\text{一実}\ \text{二実}\ \text{廉}}{\text{方}^3} + \frac{2\,\text{一実}\ \text{三実}\ \text{廉}}{\text{方}^3}$$
$$+ \frac{2\,\text{一実}^3\,\text{廉}^2}{\text{方}^5} + \frac{6\,\text{一実}^2\ \text{二実}\ \text{廉}^2}{\text{方}^5} \qquad (\text{火})'$$
$$+ \frac{5\,\text{一実}^4\,\text{廉}^3}{\text{方}^7} + \frac{\text{二実}^2\,\text{廉}}{\text{方}^3}$$

この（火）は，一実～四実に関して対称ではない．しかし，一実から四実までを甲斜冪の第１項から第４項までに順にあてるように指定してあるので安定は良い．

（火）を現代的に験すのに真正面から，つまり，２次方程式の解の公式の根号の部分を，一実から四実までの４変数の関数として展開するのは大変なので

$$p = \text{一実} + \text{二実} + \text{三実} + \text{四実}$$

とおいて根号部分を p について級数に展開して５次までとり，次に p を展開して一実について４次，二実について２次，三実，四実について１次までとって整理したものを作り比較してみると一致する．

さて，（火）で　十六｜弦巾径巾 → 一実，六十四｜弦三 → 二実，百二十八径巾｜弦五 → 三実，

千〇二十四径三｜弦七五 → 四実，｜径巾 → 方，｜ → 廉　と代入して，即ち（火）′で

$$\text{一実} = \frac{\text{弦}^2\,\text{径}^2}{16},\quad \text{二実} = \frac{\text{弦}^4}{64},\quad \text{三実} = \frac{\text{弦}^6}{128\,\text{径}^2},$$

$$\text{四実} = \frac{5\,\text{弦}^8}{1024\,\text{径}^4},\quad \text{方} = \text{径}^2,\quad \text{廉} = 1$$

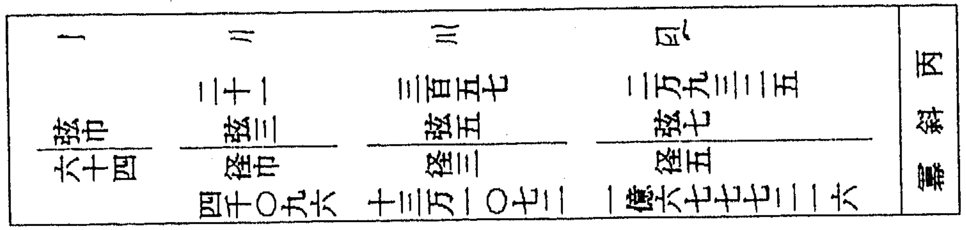
を代入して次の乙斜冪が得られる．

乙斜冪

一	二	三	四
弦巾/十六	弦三五/径巾二百五十六	弦五二十一/径三二千〇四八	弦七四百二九/径五六万五五三六

$$乙斜冪 = \frac{弦^2}{16} + \frac{5弦^4}{256径^2} + \frac{21弦^6}{2048径^4} + \frac{429弦^8}{65536径^6}$$

同様にして次のように丙斜冪が得られる.



$$丙斜冪 = \frac{弦^2}{64} + \frac{21弦^4}{4096径^2} + \frac{357弦^6}{131072径^4} + \frac{29325弦^8}{16777216径^6}$$

この付近になると原文には係数の若干の書き誤りがある. 乙斜冪の第四項の分母の係数は一億でなく一千万である. しかし, そうだとしても一六七七七二一六とは書かなかったろう. 一億〇六七七七二一六とは書いてないので誤りと言い切るわけにはいかない. (下に書き添えた式では正した.)

5. 下巻の第一術起〔3〕

ここで, これ以前の諸書[4)] にもあるように

甲斜冪×4, 乙斜冪×16, 丙斜冪×64

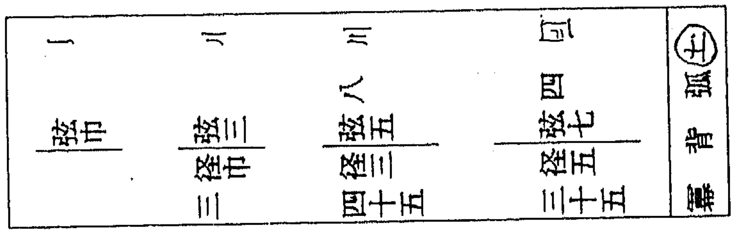
を列記して係数を小数表示し, 係数が逐次どうなっていくかを調べる.

「第1項の係数は常に1である. 〔よって一商の数係数は1である.〕

第2項は, 甲斜冪×4の係数は0.25, 乙斜冪×16の係数は0.3215で, 順次このようにして10番目では〔上には挙げてないが〕0.33333301となる.

だから極限は$\frac{1}{3}$である. 〔よって二商の数係数は$\frac{1}{3}$である.〕」

このようにして, 三商, 四商も推定して



(6)

$$弧背冪 = \frac{弦^2}{1} + \frac{弦^4}{3径^2} + \frac{8弦^6}{45径^4} + \frac{4弦^8}{35径^6} \qquad (6)'$$

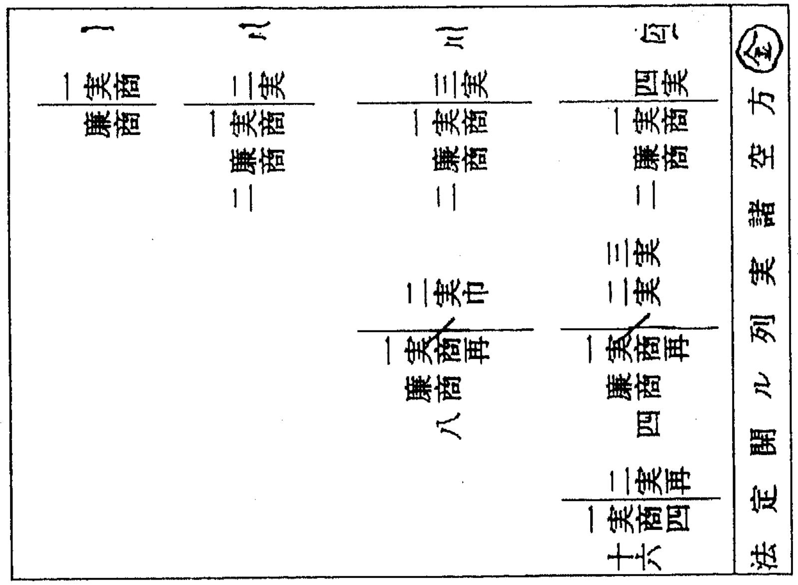
を得る.

この弧背冪から弧背を得るのに, 弧背冪の一商(第1項)から四商(第4項)までを順に一実から四実までとして次の方程式を解く.

$$(一実+二実+三実+四実) + 0_2 - z^2 = 0 \qquad (7)$$

やはり綴術で解いて次の(金)と名付ける公式を示している.

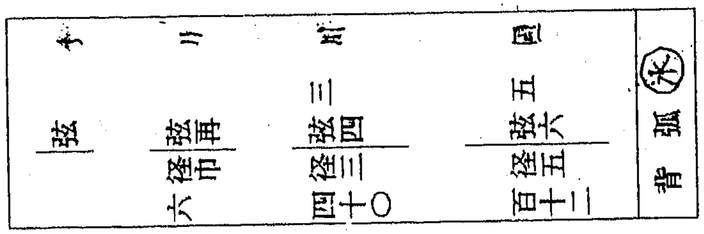
これも現代的には(火)と同様の方法で検証して, 一致することを確かめた.



(金)

$$y = \frac{\sqrt{一実}}{\sqrt{廉}} + \frac{二実}{2\sqrt{廉}\sqrt{一実}} + \frac{三実}{2\sqrt{廉}\sqrt{一実}} + \frac{四実}{2\sqrt{廉}\sqrt{一実}}$$
$$+ \frac{二実^2}{8\sqrt{廉}(一実)\sqrt{一実}} - \frac{二実\ 三実}{4\sqrt{廉}(一実)\sqrt{一実}}$$
$$+ \frac{二実^3}{16\sqrt{廉}(一実)^2\sqrt{一実}}$$

この(金)の一実〜四実に前の"弧背冪"の一商〜四商を代入して整理し, 弧背を得る.

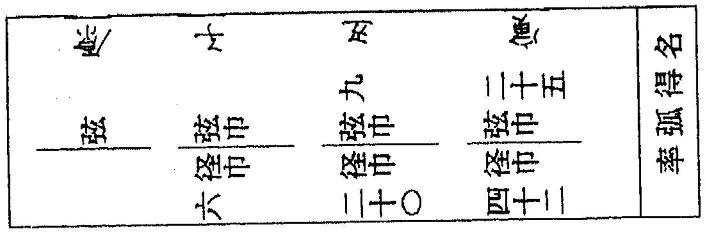


$$弧背 = \frac{弦}{1} + \frac{弦^3}{6\ 弦^2} + \frac{3\ 弦^5}{40\ 径^4} + \frac{5\ 弦^7}{112\ 径^6} \qquad (8)'$$

6．下巻の第一術起〔4〕

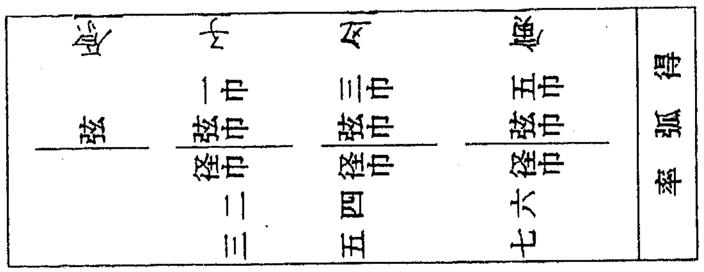
いま得られた，弧背を表す第4項までの級数から，和算で普通に用いる表現に直し，さらに項をさきまで求める方法は本書の独創ではないが，本書の言うところを一応述べて見る．

「〔得られた級数の〕第1項を原数，第1項で第2項を割って子，第2項で第3項を割って丑，第3項で第4項を割って寅とする．この子・丑・寅の分母子の構成を見て，さらに続く項である卯・辰などを知るのである.」



$$弧背 = 弦 + （第一項）\frac{弦^2}{6\ 径^2} + （第二項）\frac{9\ 弦^2}{20\ 径^2} + （第三項）\frac{25\ 弦^2}{42\ 径^2}$$

「このままでは分かりにくいので，次のように変形する.」



$$弧背 = 弦 + （第一項）\frac{1^2 \cdot 弦^2}{2 \cdot 3 \cdot 径^2} + （第二項）\frac{3^2 \cdot 弦^2}{4 \cdot 5 \cdot 径^2} + （第三項）\frac{5^2 \cdot 弦^2}{6 \cdot 7 \cdot 径^2}$$

「子・丑・寅の分母子を視察すると，分子は一冪，三冪，五冪となっている．だから次の項の卯は七冪，辰は九冪で以下奇数冪が続く．分母は二因三，四因五，六因七となっていく．だから卯は八因九，辰は十因十一で以下奇偶相乗が続く.」として，「術」で示した級数が得られる，と言っている．このような手段で正しい結果が得られたのは，優れて解析的な“円弧”という対象の有り難味であろうか．

7．綴術〔(木)，(火)，(金)〕の手順の推定について

筆者の本篇での関心事はこれ以後である．

さきに 4．(4．下巻の第一術起〔2〕) で述べたように忍澄は

「さて，綴術に開くことは難しくはないが口伝えでないと紛れやすいので，ここでは定法を立てて示すだけにする．強いて綴術を知ろうとしたら師について知るのが良く，自分（忍澄）が秘しているのではない.」

と言っている．つまり，既にその当時にはそれほど難しい事ではなく，それを心得ている算家を求めて師とすることも困難でなくなってきた，と解してよいのではあるまいか．そこで〔Ⅲ〕を参考に考えてみた．[5][6]

そして，(木)，(火)，(金) に共通して

(a) 対象が2次方程式であること．従って

(b) 第一着手としては廉級で割って2次の項の係数を1とし，新たな廉級を1として始めること．

として考えを進めて一応の手順のアイデアを得た．

その後，建部賢弘，[7] 菅野元建[8] に既に同様な業績のあることを知った．

建部のものは忍澄が示したように，実・方・廉という文字係数で計算を進めているわけではない．

菅野のものは彼の著『綴術起源』の原文未見であるが筆者の到り得た所とほぼ同様と思われる．筆者に取るところがあるとすれば計算の手順を取り出し，手順としてまとめたということである．しかし，本稿では (木) を略し (火) と (金) を説明してみることにした．

なお，（木）についても筆者の手順で，七商まで求めてみてあり，その結果は現代的に（木）を検証した前述のものと一致する．

慣れると，組立除法に比べて，余分なものを書くことが少ないから，遥かに早い．このことは（火），（金）でも全く同様に感ずる．

8．綴術（火）の手順の推定

対象とする4．（4．下巻の第一術起〔2〕）の(5)の2次方程式で

$$方 = q,\quad 廉 = r$$

とする．これは（木）と同じだが，（火）では実級が一実から四実まで4項になっているので，一実～四実をそれぞれ $J1$～$J4$ で表して

$$J1+J2+J3+J4-qx+rx^2=0$$

とする．（未知数を便宜上 y から x にかえた．）

7．（7．綴術〔(木)，(火)，(金)〕の手順の推定について）の始めで述べた(a)に従って，両辺を r で割って廉級を1にする．

$$\frac{J1}{r}+\frac{J2}{r}+\frac{J3}{r}+\frac{J4}{r}-\frac{q}{r}x+x^2=0 \qquad (9)$$

(5)でも，従って(9)でも1次の項の係数は負である．

実級が4項から成るのでそれらを逐次計算に参加させるところが（木）と異なる．以下，手順を述べよう．〔表Ⅰ〕を参照して戴きたい．

① 計算のための商，実，方，廉の欄を列として設け，行についても実1，実2，……，商1，商2，……等のように上から番号を付けるものとして

$$実1 \to \frac{J1}{r}+\frac{J2}{r}+\frac{J3}{r}+\frac{J4}{r}$$

$$方1 \to -\frac{q}{r} \qquad 廉1 \to 1$$

とそれぞれ記入する．

② 実1の第1項 $\frac{J1}{r}$ を方1の符号を変えたもので割って $\left[\frac{J1}{q}\right]$ 一商とし，商1の欄に書く．

③ 商1を2倍して方2に書き，商1を2乗して実2に書く．

③′ 実1の第2項 $\frac{J2}{r}$ を実2に下ろして書く．

〔表1〕　綴術（火）の実行表

行番号	商	実	方	廉	行番号
1.	② $\frac{J1}{q}$ 〔1.　〕	（本文の式（9））① $\frac{J1}{r}+\frac{J2}{r}+\frac{J3}{r}+\frac{J4}{r}$	$-\frac{q}{r}$	1	1.
2.	$\frac{J1^2r}{q^3}$〔2. 2〕 $+\frac{J2}{q}$ ④〔2. 1〕	$\frac{J1^2}{q^2}$ ③ $+$ ③′	$\frac{2J1}{q}$ ③		2.
3.	$\frac{2J1^3r^2}{q^5}$〔3. 3〕 $+\frac{2J1\ J2\ r}{q^3}$〔3. 2〕 $+\frac{J3}{q}$ ⑥〔3. 1〕	$\frac{2J1^3r}{q^4}+\frac{2J1\ J2}{q^2}$ ⑤ $+$ ⑤′	$\frac{2J1^2r}{q^3}+\frac{2J2}{q}$ ⑤		3.
3. 1		$\frac{4J1^4r}{q^6}+\frac{4J1^2J2\ r}{q^4}+\frac{2J1\ J3}{q^2}$ ⑦			3. 1
3. 2		$\frac{J1^4r}{q^6}+\frac{2J1^2J2\ r}{q^4}+\frac{J2^2}{q^2}$			3. 2
4.	$\frac{5J1^4r^3}{q^7}$〔4. 5〕 $+\frac{6J1^2J2\ r^2}{q^5}$〔4. 4〕 $+\frac{J2^2r}{q^3}$〔4. 3〕 $+\frac{2J1\ J3\ r}{q^3}$〔4. 2〕 $+\frac{J4}{q}$ ⑨〔4. 1〕	$\frac{5J1^4r}{q^6}+\frac{6J1^2J2\ r}{q^4}+\frac{2J1\ J3+J2^2}{q^2}$ ⑧ $+$ ⑧′	$\frac{4J1^3r^2}{q^5}+\frac{4J1\ J2\ r}{q^3}+\frac{2J3}{q}$ ⑧		4.

〔表2〕　綴術（金）の実行表

行番号	商	実	方	廉	行番号
1.	① $\frac{J1s}{rs}$	（本文の式（10））$-\frac{J1s^2}{rs^2}-\frac{J2}{rs^2}-\frac{J3}{rs^2}-\frac{J4}{rs^2}$	0	① 1	1.
2.	$\frac{J2}{2J1s\ rs}$ ③	$-\frac{J2}{rs^2}-\frac{J3}{rs^2}-\frac{J4}{rs^2}$ （ここは（火）の第1行と同じかたち）	$\frac{2J1s}{rs}$	② 1	2.
3.	$-\frac{J2^2}{8\ J1s^3rs}+\frac{J3}{2\ J1s\ rs}$ ⑥	$\frac{J2^2}{4\ J1s^2rs^2}$ J. $+$ ⑤′	$\frac{J2}{J1s\ rs}$ ⑤		3.
4.	$\frac{J2^3}{16\ J1s^5rs}-\frac{J2\ J3}{4\ J1s^3rs}+\frac{J4}{2\ J1s\ rs}$ ⑨	$-\frac{J2^3}{8\ J1s^4rs^2}+\frac{J2\ J3}{2\ J1s^2rs^2}$ ⑧ $+$ ⑧′	$-\frac{J2^2}{4\ J1s^3rs}+\frac{J3}{J1s\ rs}$ ⑦		4.

これで実2は $\dfrac{J1^2}{q^2}+\dfrac{J2}{r}$ となる．

④ この実2を，方1の符号を変えたもので割って二商とし，商2に書く．

⑤ 商2を2倍して方3とする．ついで，商2と方2を掛けたものを実3に書く．

⑤′ 実1の第3項 $\dfrac{J3}{r}$ を実3に書き足す。

これで実3は $\dfrac{2J1^3r}{q^4}+\dfrac{2J1\ J2}{q^2}+\dfrac{J3}{r}$ となる．

⑥ この実3を，方1の符号を変えたもので割って三商とし，商3に書く．

⑦ 商3と方2との積を実3.1に書き，商2を2乗して実3.2に書く．

⑧ 商3を2倍して方4に書く．ついで，実3.1と実3.2とを加えて実4に書く．

⑧′ 実1の第4項 $\dfrac{J4}{r}$ を実4に書き足す．

⑨ 実4を，方1の符号を変えたもので割って四商とし商4に書く．

これで（火）の公式は完成した．

さらに同様の手順で五商を求めて見てある．それがさきに4．(4．下巻の第一術起〔2〕）で述べた現代的な計算の結果と一致することは言うまでもない．

9．綴術（金）の手順推定の略述

5．(5．下巻の第一術起〔3〕）の(7)の方程式である．

二実～四実は $J2\sim J4$ とするが，後の計算の都合上一実と廉は

一実 ＝ 一実商冪 $=J1s^2$〔従って　$J1s^2=J1$〕

廉 ＝ 廉商冪 $=rs^2$　　〔同様に　　$rs^2=r$〕

と表すことにする．s は，商または *square root* の頭文字のつもりである．

従って

$$J1s^2+J2+J3+J4+0x-rs^2\ x^2=0$$

を解く．(未知数を便宜上 z から x に変えた.)

この両辺を $-rs^2$ で割って

$$-\frac{J1s^2}{rs^2}-\frac{J2}{rs^2}-\frac{J3}{rs^2}-\frac{J4}{rs^2}+x^2=0 \tag{10}$$

この方程式の第一の近似解すなわち一商は，当然 $\dfrac{J1s}{rs}$ である．

既に（火）は説明したので簡単に述べる．〔表2〕を参照して戴きたい．

① 計算のために商，実，方，廉の場所を設け，それらの第1行に

実1→ $-\dfrac{J1s^2}{rs^2}-\dfrac{J2}{rs^2}-\dfrac{J3}{rs^2}-\dfrac{J4}{rs^2}$

方1→ 0

廉1→ 1

商1→ $\dfrac{J1s}{rs}$

とそれぞれ記入する．

〔表2〕の第1行の……で囲まれた所は上の実1，方1，廉1である．

商1は，すぐ上で述べたように，$\dfrac{J1s}{rs}$ であるからそれを記入する．

② 上の実1，方1，廉1の式，つまり，(10)を $x-\dfrac{J1s}{rs}$ で2回割り，その結果を，最初の“余り”を実2，次の“余り”を方2，商を廉2，即ち

実2→ $-\dfrac{J2}{rs^2}-\dfrac{J3}{rs^2}-\dfrac{J4}{rs^2}$

方2→ $\dfrac{2J1s}{rs}$

廉2→ 1

と，それぞれ記入する．

これで前の（火）の場合の第1行と同様のかたちになった．

あとは（火）の場合に倣えばよい．

例えば，次の方2の符号を変えたもので実2の第1項を割って商2を得る．

商2→ $\dfrac{J2}{2J1s\ rs}$

以後は省略する．手順を続けて五商を求め，現代的に求めた結果と一致することを確かめてある．

10．公式（火）の検討

原文を読めば，これら公式を用いて正しい結果に到達しているので，これら公式の有用性はその面からは確かめられている．

公式として興味あるのは（木）よりも，一実～四実をうまく使い処理している（火）

（金）である．

そこで，公式（火）についてすこし調べてみる．

さきに，4．（4．下巻の第一術起〔2〕）の終わり近くで，公式（火）を現代的に験した，と述べた．そのとき求めた（火）の展開式は分子が $J1$ ～$J4$ と r，分母が q の多項式であり

$$J1=\frac{c^2d^2}{16},\ J2=\frac{c^4}{64},\ J3=\frac{c^6}{128d^2},\ J4=\frac{5c^8}{1024d^4},\ r=1,\ q=d^2$$

である．(ただし，c=弦，d=径（直径））

この式に

$c=1$，$d=10$

を代入して各項の値を計算し，その大きさの順に並べてみたのがつぎの表〔表3〕である．

番号1　は，通し番号つまり大きさの順の番号．

番号2　は，展開された多項式（qの累乗を分母に持つが）を常識的に次数に従って並べたときの番号．

番号3　は，8（8．綴術（火）の手順の推定）の〔表1〕で述べた商に項別に付いている番号．従って〔5．1〕～〔5．6〕はそこに示してはなく，筆者が引き続いて別に求めたもの．

番号4　は，4（4．下巻の第一術起〔2〕の（火）に，そこには縦書きに，付けてある番号．

番号2の15，16，35，36，70といった項が，よく前の方に拾い上げられていることは注目に値すると言えようか．4．（4．下巻の第一術起〔2〕）で「安定は良い」と述べたがその事がお分かり戴けたと思う．

11．終わりに

以上，狭義の綴術の，対象となる2次方程式の定数項が複数になる場合の，手順を捉え、再現してみたく書き進めてきた．

杉浦はまた「和算の解析学の主要な対象は多項式と冪級数である．この範囲で和算家達は微分および積分に当たる演算を行い，多くの問題を解いた.」と述べている.[9)]

『弧矢弦叩底』の第一問を読むとその事の具体例をみる感がある．

また，建部の時代から忍澄の生きた時代まで百余年．忍澄を読んだだけでは深化したとは言えないがやはり進歩したなと思う．その間の算家一人々々の積み上げがよく集積したなと考える．

［表3］

『弧矢弦叩底』第1問公式（火）展開の並べ替え

番号1	番号2	展開の項	番号3	番号4		
1	1	$\frac{J1}{q}$	〔1．　〕	〔一．一〕	0.0625	E- 0
2	2	$\frac{J2}{q}$	〔2．1〕	〔一．二〕	1.5625	E- 4
3	5	$\frac{J1^2 r}{q^3}$	〔2．2〕	〔二．一〕	3.9063	E- 5
4	3	$\frac{J3}{q}$	〔3．1〕	〔一．三〕	7.8125	E- 7
5	6	$\frac{2J1\cdot J2\cdot r}{q^3}$	〔3．2〕	〔二．二〕	1.9531	E- 7
6	15	$\frac{2J1^3 r^2}{q^5}$	〔3．3〕	〔三．一〕	4.8828	E- 8
7	4	$\frac{J4}{q}$	〔4．1〕	〔一．四〕	4.8828	E- 9
8	7	$\frac{2J1\cdot J3\cdot r}{q^3}$	〔4．2〕	〔二．三〕	9.7656	E-10
9	16	$\frac{6J1^2 J2\cdot r^2}{q^5}$	〔4．4〕	〔三．二〕	3.6621	E-10
10	8	$\frac{J2^2\cdot r}{q^3}$	〔4．3〕	〔五　〕	2.4414	E-10
11	35	$\frac{5J1^4 r^3}{q^7}$	〔4．5〕	〔四　〕	7.6294	E-11
12	9	$\frac{2J1\cdot J4\cdot r}{q^3}$	〔5．1〕		6.1036	E-12
13	10	$\frac{2J2\cdot J3\cdot r}{q^3}$	〔5．2〕		2.4414	E-12
14	19	$\frac{6J1^2 J3\cdot r^2}{q^5}$	〔5．4〕		1.8311	E-12
15	17	$\frac{6J1\cdot J2^2 r^2}{q^5}$	〔5．3〕		9.1553	E-13
16	36	$\frac{20J1^3 J2\cdot r^3}{q^7}$	〔5．5〕		7.6294	E-13
17	70	$\frac{14J1^5 r^4}{q^9}$	〔5．6〕		1.3351	E-13
18	12	$\frac{2J2\cdot J4\cdot r}{q^3}$			1.5259	E-14
19	25	$\frac{6J1^2 J4\cdot r^2}{q^5}$			1.1444	E-14
20	20	$\frac{12J1\cdot J2\cdot J3\cdot r^2}{q^5}$			9.1553	E-15
21	11	$\frac{J3^2 r}{q^3}$			6.1035	E-15

「円理真術」と割り書きしながら，結局「円」に終始したためか『弧矢弦叩底』と題した忍澄の心裡を忖度しながら早く第二問以下も読み進みたいと思う（下線筆者）。

杉浦論文を見る機会を与えて下さった大竹茂雄氏，最初に日本学士院蔵『弧矢弦叩底』の撮影写真を貸与下された濱田敏男氏，両氏を含めて筆者の質問にもよく応じて下さった，道脇義正氏を中心とする群馬県和算研究会員の諸氏，及び日本学士院に謝意を表する．

文　献

〔Ｉ〕 日本学士院日本科学史刊行会:『明治前日本数学史（全５巻)』(岩波書店) 1954.12.24～1960.6.3 (復刊1983.11.25)
〔Ⅱ〕 杉浦光夫:「円理──和算の解析学について──」(東京大学教養学部，東京大学出版会) 1982.3.25 (紀要比較文化研究第20輯1981所収)
〔Ⅲ〕 加藤平左ヱ門:『和算の研究　行列式及び円理』(開成館) 1944.7.15

注

1）〔Ⅱ〕p.20.

2）〔Ⅲ〕p.118. なお，〔Ⅲ〕ではp.117に『円理綴術』の項があり「著者名モ年紀モ何モナイ写本デアル．級数20箇ヲアゲ，其ノ作リ方ヲ説イテ居ル．初期ノ円理ニ使ハレタ級数ハ殆ド網羅シテ居ルカラ誠ニ都合ノヨイ書デアル．何レ関流ノ秘書デアッタモノト思ハレル．……」(下線筆者）とある．『円理弧背術』については，別にp.94にある．

3） 始めの部分などは例えば『円理弧背術』.〔Ⅲ〕p.95.

4） やはりたとえば『円理弧背術』.〔Ⅲ〕p.95.
　4行あとに10番目の数字が挙げてある．本文には略したが原文にはあとふたつ数字が挙げてあり，それらは『円理弧背術』のものとほぼ一致する．ただ第4項の推定法は相違しており，その方法は面白そうである．

5）〔Ⅲ〕p.89, p.90.
　ここには『乾坤之巻』にある算木形式の計算と，現代方式のそれとが示してある．前者は難解，後者は繁雑の感がある．
　また，(木）について〔Ⅲ〕では，(木）で求めた本文の式（3）を指して，「本文の式(1)′を根号を用いて解き，複号は負を採って展開し，4項まで採ったものだ」，という意味だけを述べている（p.130).

6）（火）については〔Ⅲ〕は特に触れていない.「代入シテ」と進めている．(p.130).
　（金）について〔Ⅲ〕は弧背冪（本文の式(6)′）を「之ヲ平方ニ開キ」とだけ述べて直ちに弧背（本文の式(8)′）を示している（p.132).

7）〔Ｉ〕Vol.2　p.321.

8）〔Ｉ〕Vol.4　p.444.

9）〔Ⅱ〕p.19.

筆者勤務先:群馬工業高等専門学校
（平成4年7月29日受理）

論　　説

賈逵の月行遅疾論

大　橋　由紀夫

1．はじめに

私は以前に「後漢四分暦の成立過程」を本誌（通巻93号，1982年，pp.1～27）に発表したが，そこで用いた史料である『続漢書・律暦志』(以後『続漢志』と略称）の中巻には，いくつかの暦法に関する議論が採録されている．それらの中で特に科学思想の面で注目すべきものは「賈逵論暦」(AD 92）である．賈逵（かき，AD 30～101）の科学思想については，すでに藪内清[1]によって論じられており，その記述がはなはだ直截で科学的であることが示されている．本稿では，特に賈逵の月行遅疾論に着目し，その天文学的解釈を通じて賈逵の科学思想の一端を探究してみたい．

☆本稿で用いる律暦志の原文は，『歴代天文律暦等志彙編』(全十冊，北京，中華書局，1975～1976,『続漢書・律暦志』はその第五冊）を用いる．

2．問題の所在

前漢の頃から，暦面の朔日と実際の朔とのずれが問題とされ，晦日にすでに夕方の西方に月が見えてしまうことを「朓」(ちょう）といい，朔日にまだ明け方の東方に月が残っていることを「仄慝」(そくとく，「側匿」とも書く）と言った．そして，これらは天人相与の思想から，君臣の行為の反映とも考えられていた．

一方，前漢の甘露二年（52 BC）に耿寿昌（こうじゅしょう）は，月の運行は，二十八宿の牽牛・東井の所では速く，婁・角の所では遅いことをとなえた．

これらのことに言及しながら，賈逵は，月の運行の遅速について論じたのであるが，その問題について検討する前に，いくつかの史料を引用しておくことにする．

〔史料1〕『漢書・五行志』(下之下）より（建始元年（32 BC）に月が2つ見えたことに関連して)[2]

「京房易伝曰，「『婦貞厲，月幾望，君子征，凶.』言君弱而婦彊，為陰所乘，則月並出．晦而月見西方謂之朓，朔而月見東方謂之仄慝，仄慝則候王其粛，朓則候王其舒.」劉

向以為朓者疾也，君舒緩則臣驕慢，故日行遲而月行疾也．仄慝者不進之意，君粛急則臣恐懼，故日行疾而月行遲，不敢迫近君也．不舒不急，以正失之者，食朔日．劉歆以為舒者候王展意顓事，臣下促急，故月行疾也．粛者王候縮肭不任事，臣下弛縦，故月行遲也.」

（京房の『易伝』に言う，「『妻は貞叔ではあるが危うい．月は満月に近い．君子が行動すると，凶.』（『易経』小畜，上九の爻辞）について．君子が弱くて妻が強いことを言う．〔陽が〕陰につけこまれれば，月が二つ出る．晦日なのに月が西方に現れることを「朓」といい，朔日なのに月が東方に現れることを「仄慝」という．仄慝であれば，王や諸候が「粛」（厳しい，または縮まる）なのであり，朓であれば，王や諸候が「舒」（ゆるんでいる，または伸びひろがる）なのである.」と．劉向の考えでは，朓とは速いことであり，君子がゆるんでいれば臣下がおごりたかぶり，従って太陽の運行が遅くなり，月の運行が速くなる。仄慝とは進まないことであり，君子が厳しければ臣下は恐れおののき，従って太陽の運行が速くなり，月の運行は遅くなり，あえて君子に近づこうとはしなくなる．ゆるんでもいなければ厳しくもなく，適正ではあるが，誤りを犯してしまった時は，朔日に食が起る，という．劉歆の考えでは，「舒」というのは王や諸候が自分の考えをおしひろげて政治をほしいままにし，臣下がせきたてられることで，したがって月の運行が速くなる．「粛」とは，王や諸候が縮肭（しゅくじく，ちぢこまること）して政治をやりおおせることができず，臣下がだらけてしまうことで，したがって月の運行は遅くなる，という.）

〔史料2〕『續漢志』（中）の「賈逵論暦」より

「案甘露二年大司農中丞耿寿昌奏，以円儀度日月行，考験天運状，日月行至牽牛・東井，日過〔一〕度，月行十五度，至婁・角，日行一度，月行十三度．赤道使然，此前世所共知也．如言黄道有験，合天，日無前却，弦望不差一日，比用赤道密近，宜施用.」

（私が考えますには，甘露二年（52 BC）に大司農中丞の耿寿昌が上奏して，「渾天儀で太陽と月の運行を測定し，天の運行のようすを調べてみますと，太陽と月が運行して〔二十八宿の〕牽牛と東井の所まで来ると，〔一日あたり〕太陽は一度以上動き，月は十五度動くが，婁と角の所に来ると，太陽は一度動き，月は十三度動きます」と述べています．赤道〔によって測定したこと〕がそういう結果をもたらしたのであって，このことは前の時代（前漢）に皆が知っていたことです．すでに言われているように，黄道〔による測定〕は有効で，天象とよく合致し，太陽の運行が進んだり遅れたりすることがなく，弦や望〔の日付〕も一日も違うことはありません．赤道を用いるのと比べて〔実際の天象に〕正確に合うのです．ぜひ採用すべきです.）

〔史料3〕『續漢志』（中）の「賈逵論暦」より

「梵・統以史官候注考校，月行当有遅疾，不必在牽牛・東井・婁・角之間，又非所謂朓・側匿，乃由月所行道有遠近出入所生，率一月移故所疾処三度，九歳九道一復.」

（李梵と蘇統とが太史官の観測ノートによって調べたところによれば，月の運行には確かに遅速があるが，必ずしも牽牛，東井，婁，角のところに〔速さが最大最小になるところが〕あるわけではなく，またいわゆる「朓」や「側匿」とも違っています．それは月が運行する道に遠近出入があることによって生ずるのであって，〔速さが速くなる所が〕ほぼ一か月にもとの速いところから三度移動し，九年で九道（月の軌道）がひとめぐりして元にもどるのです.）

さて，上記の〔史料2〕で，牽牛と東井はそれぞれ冬至点と夏至点にあたり，婁と角は春分点と秋分点にあたる．したがって，耿寿昌が上奏した月の運行の遅速は，賈逵も指摘しているように，赤道座標によって測定したために生じたもので，現在の「赤道への整約」にあたるものであることがわかる．耿寿昌の月行の遅速が単に座標系の取り方によるものであることは，すでに指摘されているが，[3] 時には誤解を招きやすい説明も見られる．例えば，藪内清は次のように述べている．

「この月行に不規則があることは，前漢甘露二年（前五二年）に耿寿昌が述べている．それによると月行は，二十八宿の牽牛・東井の間において最も疾く一五度に達し，婁・角の間では遅く一三度になるという．このように月行に遅疾があるため，暦面上は晦日で月が見えないはずなのに，月の運行が速くて西方に上弦の月が見えたり，また逆に朔日に下弦の月が東方に残っているようなことが起る.」（藪内清）[4]

この説明は誤解を招きやすい表現である．なぜなら，耿寿昌が発見した月行の遅速は，座標系の取り方による見かけのもので，月と太陽との相対関係に全く無関係であり，従って晦日や朔日に月が西方や東方に見えてしまう現象とも無関係だからである．そして，耿寿昌が発見した月行の遅速が見かけのものであることは，賈逵も了解していたと思われる．そこで，次節において，まず耿寿昌の月行遅疾論の天文学的意味を再確認しておくことにする．

さらに，〔史料3〕に関して，藪内清は次のように述べている．

「その前半において耿寿昌の説を否定している．さらに「又」以下の文には劉向の所説を反駁している．この文によれば，月行に遅疾があるのは朓，仄慝というようなことでなく，月道に遠近があるためで，しかもその軌道上の運行では，だいたい一カ月でもとの疾処（現在の近地点にあたる）が三度移動し，九歳の中に月道を一周するというのである.」（藪内清）[5]

しかし，この解釈には疑問がある．まず，耿寿昌の説については，賈逵はそれを否定し

ているわけではなく，それを事実として肯定し，その原因を理解した上で，さらにそれとは別種の月行の遅速が存在することを〔史料3〕で述べていると思われる．この点については，次節で詳しく検討する．

次に，「又非所謂朓側匿」という文は，確かに藪内清の指摘のように，〔史料1〕に引用したような劉向や劉歆の不合理な説に反駁しているように見える．銭宝琮も，『続漢志』の，太初暦を百年あまり使って暦が実際の天象よりも後れて朔の日に月が見えることもあるようになってしまった，という記事と，「非所謂朓側匿，乃由月所行道有遠近出入所生」という文を引用して，「『月が朔に現れることがある』というのは，暦日が天象より後れた結果であり，けっして月の運行が速すぎるために起るのではなく，災異であるとはいえないことを承認している．」，[6] と述べており，この賈逵の文は劉向や劉歆の説を批判したものと見ているようである．ここで銭宝琮が「けっして月の運行が速すぎるために起るのではない」としているのは，〔史料3〕の文脈から妥当ではないが，それはともかくとして，ここでは，本当に賈逵が〔史料3〕で劉向や劉歆の災異説を批判しているのかどうかを考えてみよう．まず〔史料3〕の文脈から考えると，耿寿昌の説についてはそれを肯定したうえで，ここで述べている月行の遅速はそれとは別種のものであることを述べているのであるから，「又」以下の文でも，必ずしも「朓・側匿」という現象を否定するわけではなく，単にここで述べている月行の遅速が「朓・側匿」とは別種のものであることを述べているにすぎないとも思われる．次に，〔史料1〕を読みかえしてみると，「朓」と「仄慝」との本来の意味は，「晦日なのに月が西方に現れること」と「朔日なのに月が東方に現れること」とであって，もともと劉向や劉歆の説のような天人相与の思想は含まれていなかったとも考えられる．したがって，〔史料3〕に「朓・側匿」という言葉が現れるからといって，そこに劉向や劉歆の説が含意されているとは限らない．そこで，賈逵の「朓・側匿」に対する考え方について再検討する必要がある．

以上のことから，問題の所在がほぼ明らかになった．まず，耿寿昌の月行遅疾論の天文学的意味を再確認し，それに対する賈逵の評価と，それと賈逵の月行遅疾論との関係を明らかにする必要がある．次に，そのことをふまえながら，賈逵の「朓・側匿」に対する考え方を明らかにする必要がある．以上のことを通じて，賈逵の科学思想の一端をさぐってみたい．

3．耿寿昌の月行遅疾論

耿寿昌は，〔史料2〕に示されているように，おそらく赤道環をそなえた渾天儀を用いて，太陽と月との赤経を測定した．そして，月は冬至点や夏至点付近では1日に15度動き，春分点や秋分点付近では1日に13度動くとしている．（ここで，「度」というのは，全周を$365\frac{1}{4}$度とする中国式の度である．本稿では，漢字で「度」と書く時は中国式の度をあらわし，記号「°」を使う時は全周を360°とするヨーロッパ式の度をあらわすことにする．）[7]

まず，上記の耿寿昌のデータが妥当なものであるかどうかを検討しよう．仮に月が黄道上を等速運動をするとすれば，1日あたり約$13^{\circ}.2$動くことになる．これを赤道座標系によって測定したらどうなるかを考える．黄道上の点の黄経と赤経との関係は，赤経をα，黄経をλ，黄道傾斜角をεとすれば，

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon \cdot \tan\lambda \quad \cdots\cdots(1)$$

で与えられる．[8] さて，西暦紀元前後におけるεの値は約$23^{\circ}.7$であったから，これを用いて，月の黄経が0°から$13^{\circ}.2$まで動くときの赤経の変化を求めると，約$12^{\circ}.1$（＝12.3度）となり，月の黄経が90°から$103^{\circ}.2$まで動くときの赤経の変化を求めると，約$14^{\circ}.4$（＝14.6度）となる．これを見ると，耿寿昌のデータはかなり良い値であることがわかる．ただし，これは月が黄道上を等速運動するものとして求めたものであるが，実際には月の中心差（月が楕円軌道を描くことによる平均位置からのずれ）はかなり大きく，これを考慮に入れた上で，赤道座標系で見た月の運行について考えてみなければならない．

ここで，月の中心差を考慮に入れることにすると，真近点角をυ，平均近点角をMとすれば，中心差は（$\upsilon-M$）で，離心率をeとすれば，

$$\upsilon - M \fallingdotseq 2e\sin M \quad \cdots\cdots(2)$$

で与えられる．[9] ここで，月のeは0.0549であるから，これを角度の単位になおし，そして月の真黄経をλ，平均黄経をLとすれば，

$$\lambda = L + 6^{\circ}.29\sin M \quad \cdots\cdots(3)$$

が得られる．ここで，(1)式と(3)式を用い，月の近地点が移動していったときに応じた1日あたりの月の赤経の変化量をグラフにしてみることにする．（なお，月の軌道の黄道に対する傾斜は，本稿のテーマに関しては無視してもさしつかえないので，考慮に入れないことにする．）図1～4は，それぞれ近地点黄経が0°，30°，60°，90°のときの月の赤経の1日あたりの変化量を実線で示し，参考のために月の黄経の1日あたりの変化量を破線で示してある．横軸は月の平均黄経を示し，0°は春分点，90°は夏至点，180°は秋分点，270°は冬至点にあたる．縦軸は経度の1日あたりの変化量を示す．

この4つのグラフから明らかなように，近地点が移動していっても，赤道座標系で月の位置を測定すれば，赤経の1日あたりの変化量はいつも夏至点と冬至点の付近で極大となり，春分点と秋分点の付近で極小となる．なお，夏至点と冬至点の付近での変化量は，約13度から約16度くらいの間で変動し，春分点と秋分点の付近での変化量は，約11度から

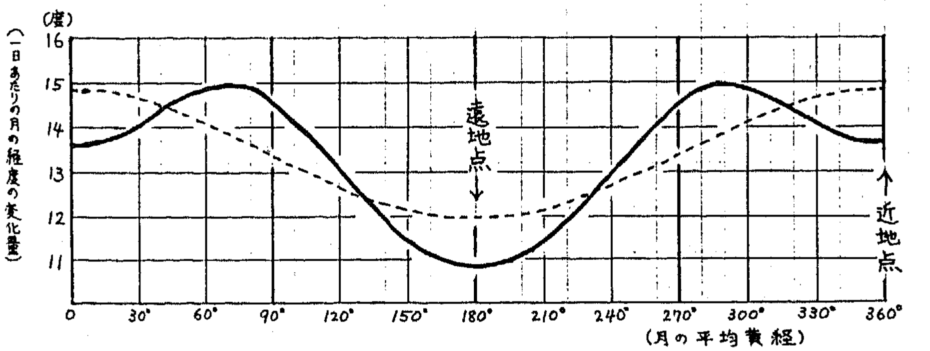


図1
月の近地点が0°のとき

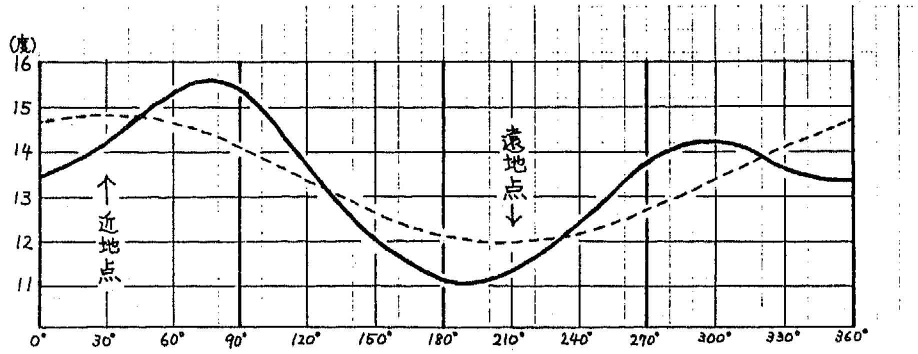


図2
月の近地点が30°のとき

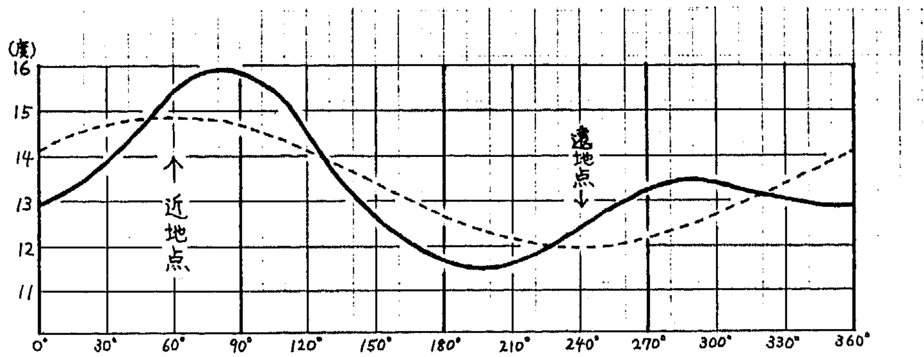


図3
月の近地点が60°のとき

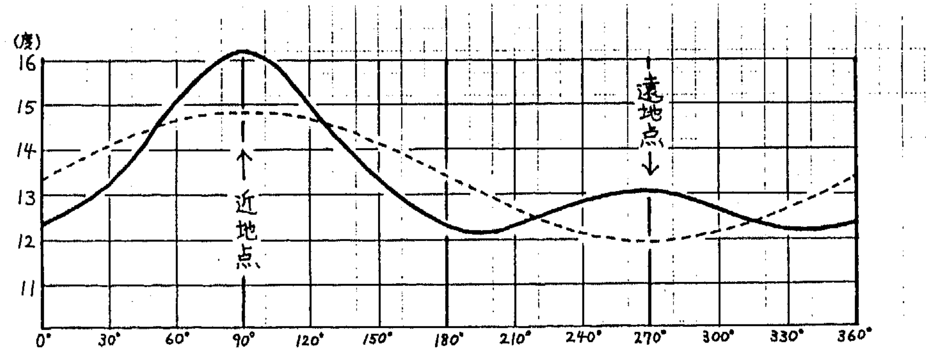


図4
月の近地点が90°のとき

約13度半くらいの間で変動している．このことから，〔史料2〕に示されているような耿寿昌の月行論は，赤道座標系に基づく限りにおいて，全く妥当なものであることがわかる．しかし，このような月行の遅速は，座標系のとりかたによって生ずる見かけのもので，実際の運行そのものの遅速とは無関係である．(このような黄経と赤経との差異は，現在「赤道への整約」と呼ばれているものに相当する．)

さて，このような見かけの月行の遅速が赤道座標系によって実際に観測されることを賈逵が承知していたことについては，「賈逵論暦」の，〔史料2〕として引用した部分の少し前のところの次の言葉に示されている．

〔史料4〕『続漢志』(中) の「賈逵論暦」より

「以今太史官候注考元和二年九月已来月行牽牛・東井四十九事，無行十一度者，行婁・角三十七事，無行十五六度者.」

(今の太史官の観測ノートによって元和二年 (AD 85) 九月以来の月が牽牛・東井を運行した 49 のデータを調べると，〔一日あたり〕十一度しか移動しなかったものはなく，婁・角を運行した 37 のデータでは，十五・六度も運行したものはありません.)

ここで「太史官候注」のデータが用いられているが，これは赤道座標系に基づいていたはずである．なぜなら，「賈逵論暦」が書かれたのは永元四年 (AD 92) であるが，詔書によって太史の黄道銅儀 (黄道環をそなえた渾天儀) が作られたのは永元十五年 (AD 103) であることが『続漢志』に記されているし，「賈逵論暦」の中にも「史官は一に赤道を以て之を度る」という言葉が見えるからである．

さて，賈逵は，「太史官候注」によれば月は牽牛や東井 (冬至点や夏至点) では運行が遅いことはなく，婁や角 (春分点や秋分点) では運行が速いことはないと言っているが，これは，図1～4の実線が冬至点や夏至点の付近で極大値をとり，春分点や秋分点の付近で極小値をとっていることと比較すれば，全く妥当なものであることがわかる．このことから，赤道座標系において生ずる月の運行の遅速を賈逵が事実として認めていたことは明らかであるし，このことは座標のとりかたによって生ずる見かけのものであることを賈逵が正しく認識していたことについては，〔史料2〕の「赤道使然」という言葉にはっきりと示されている．

以上のことから，〔史料3〕に「不必在牽牛・東井・婁・角之間」とあるのは耿寿昌の説を否定したものと見るべきではなく，耿寿昌の説を肯定したうえで，それよりは一段高いレベルから別種の月行の遅速 (つまり中心差) の存在を指摘したものと見るべきであることは，明らかであろう．

4．月の中心差の発見

月は，現在の知識から言えば，地球のまわりを楕円軌道を描いているために，運行速度の遅速を生じ，近地点のあたりでは速く，遠地点のあたりでは遅くなる．そして，このようにして生じた平均位置からのずれは，現在は「中心差」と呼ばれている．さて，このような運行の真の遅速は，図1～4から明らかなように，赤道座標系によったのでは発見することは不可能であり，黄道を基準として黄経を測定することによって始めて図の破線のような真の遅速を発見することができる．したがって，〔史料3〕にあるような月行の真の遅速の発見は，黄道環をそなえた渾天儀によってなされたことは明らかである．ここに「九歳九道一復」とあるが，これは月の近地点が9年で一周することを指している．月の近地点が実際に一周する時間は約8.8年であるから，当時の観測が非常に正確だったことがわかる．

ところで，賈逵は〔史料2〕において黄道に基づく観測の有効性を主張しているが，おそらく元来は，太陽や月が黄道（月の場合は黄道の付近）を運行しているために，耿寿昌が述べたような遅速を除去するというのが主旨であったと思われる．ところが，実際に黄道に基づいて精密に測定してみると，思いがけず〔史料3〕に示されているような月行の真の遅速が発見されたのであろう．なお，〔史料3〕では李梵と蘇統が「史官候注」を用いたとされているが，すでに述べたように，「賈逵論暦」が書かれた当時は太史官は黄道環を使わずに赤道座標のみを用いていたので，そのデータも赤道座標系に基づいていたはずである．したがって，李梵と蘇統は赤道座標系によるデータを，当時民間で使われていた黄道環をそなえた渾天儀によって，黄道座標に変換したのであろう．

『続漢志』から判断する限りでは，中国における月の中心差の発見者は李梵と蘇統であり，さらに賈逵がその現象を天文学的に解明したものと思われる．

5．朓と側匿について

まず，「朓」と「側匿」の意味について明確にしておく必要がある．[10]

まず，〔史料1〕に引かれた京房の『易伝』において，「朓」の定義は「晦而月見西方」，「仄慝」の定義は「朔而月見東方」ということであり，これを候王の行動と結びつけるのは，定義から離れた一つの解釈に過ぎないと見るのが妥当であろう．この候王の行動についての理解が，〔史料1〕で明らかなように劉向と劉歆とで異なっていることは，これが一般的な定義ではなく一つの解釈に過ぎなかったことの傍証となる．さらに，唐の『初学記』（巻第一，月第三）には『漢書』からの引用があるが，朓と側匿に関しては「晦而見西方謂之朓，朔而見東方謂之朒，亦謂之側匿.」[11] という部分を引いているだけである．このことも，「朓」と「側匿」の本来の定義についての当時の見方を示唆している．

なお，京房の『易伝』と同様の朓と側匿の定義については，『太平御覧』（巻四，天部四，月）に引く『尚書大伝』に「晦而月見西方謂之朓，朔而月見東方謂之側匿，側匿則候王其粛.」[12] とある．

次に，賈逵の弟子であった許慎の『説文解字』を見ることにする．そこでは，第七篇上の「朓」の条には，その語義の説明としては「晦而月見西方謂之朓」とのみ書かれ，「朒」の条には「朔而月見東方謂之縮朒」とのみ書かれている．[13] これを見ても，「朓」と「縮朒」（側匿と同義）の定義そのものは，君臣の行動と結びつけた解釈を必ずしも伴なっていなかったと考えてよいであろう．

それでは，賈逵は現象としての「朓」や「側匿」が起りうると考えていただろうか．この問題を考える手がかりとして，「賈逵論暦」の中に次のような記述がある．

〔史料5〕『続漢志』（中）の「賈逵論暦」より

「天道参差不斉，必有余，余又有長短，不可以等斉．治暦者方以七十六歳断之，則余分稍長.[14] 稍得一日．故易金火相革之卦象曰，「君子以治暦明時.」又曰，「湯・武革命，順乎天応乎人.」言聖人必暦象日月星辰明数，不可貫数千万歳，其間必改更．先距求度数，取合日月星辰所在而已．故求度数，取合日月星辰，有異世之術.」

（天の運行はふぞろいであって一様ではなく，必ず端数があります．端数にはまた長短があって，一様にそろえることはできません．暦を作った人は，今まさに〔暦の基本周期を〕76年と決めてしまっているために，端数がやや長すぎ，だんだんと〔誤差がたまって，ついに〕一日にも達してしまうのです．このため，『易経』の金火相革の卦（つまり「革」の卦）の「象伝」には「君子は暦を作って季節のめぐりを明らかにする」とあり，また〔「象伝」には〕「〔殷の〕湯王と〔周の〕武王とは天命をあらためて，天命に従い，人心に応じた」とあります．ここで言っているのは，聖人は必ず日月星辰を観側して〔暦の〕数値を明らかにするのだが，〔一定の数値で〕数千万年をつらぬくことはできず，その間にどうしても改訂しなければならない，ということです．〔暦が天象から〕へだたるのに先だって度数を求め，それによって日月星辰の所在に〔暦を〕合せていくにすぎません．このため，度数を求め，それによって日月星辰の所在に合せていくのにも，異なった時代〔にはそれぞれ別々〕の方法があるのです.）

ここで，「天道参差不斉」云々とあるのは，天の運行には人知の及ばない不規則さがあると言っていると解すべきではない．そうではなくて，天の運行は規則的であるとしても，有限の数値を以てしてはそれを完全に表現しつくすことはできないことを言っているので

ある．ここで「治暦者方以七十六歳断之，則余分稍長」と述べているのは至言である．この76年というのは，後漢四分暦で，1章（=19年，置閏法の基本周期）の4倍の「蔀」（ほう）と呼ばれる周期にあたり，置閏周期（章）の倍数でしかも日数が整数になる最小の周期である．そして，1蔀の日数は27759日である．さて，四分暦では1年の日数は365¼日であるから，1年の真の長さ（約365.2422日）より0.0078日長すぎるが，だからといって，もし仮に1蔀の日数を1日へらして27758日としたら，27758÷76≒365.2368であるから，1年の真の長さより0.0054日短くなってしまう．つまり，76年の日数を整数とするような周期を使う限り，誤差をこれらより小さくすることはできないのである．賈逵は，76年周期を用いた場合の誤差の量を必ずしも算定していたわけではないかもしれないが，しかし，有限の周期を用いるかぎり，暦を天の運行に完全に一致させることはできないことを洞察していたことは疑いがない．[15]

以上のことから，賈逵は暦面と天象との相違が生ずる場合が起るのは不可避であると考えていたと思われる．もちろん，それは君臣の行動の反映ではない．そうではなくて，暦の精度に限界があるためである．だから，賈逵は，「朓」や「側匿」も暦の限界のゆえに起りうると考えていたのではないかと思われる．したがって，〔史料3〕の「非所謂朓・側匿」という部分は，「朓」や「側匿」の本来の意味において，賈逵は必ずしも否定しておらず，ただ，そこで言及している月の遅速は，いわゆる朓や側匿とは別種のものであることを述べているのであると思われる．つまり，暦の不備のために生じた偶発現象ではなく，観測によって確認された自然現象であることを述べているのであろう．

6．結　論

以上のことから明らかなように，耿寿昌が述べた月行の遅速が座標系の取り方による見かけのものであって李梵と蘇統が発見した月行の遅速が真の遅速であるということを賈逵が正しく理解しており，また，賈逵は有限の数値を以てしては天の運行を完全に表現しつくすことはできないということを洞察していた．このような洞察が，伝統的な理論には必ずしも拘泥せずに観測を重視し，自然認識の深化をめざすという方向へむかわせたのであろう．

自然現象と理論との関係についての賈逵のこのような考え方は非常に科学的なものであって，賈逵の天文学におけるすぐれた成果の根底にある科学思想として高く評価されるべきであろう．

〔付記〕 梵・統の月行遅速論に関する飯島忠夫の説について

飯島忠夫は，李梵のような「梵」の文字を名とする人々がインド人であろうと推定し，梵・統の月行遅速論も仏教渡来に伴なったインド天文学の影響と想像していた．[16]

この問題については，すでに銭宝琮が，「梵」の文字を名としていてもインド人であるとは限らず，漢人である可能性が高いことを示し，飯島忠夫の説を否定している．[17]

この「梵」の文字の問題はともかくとして，月行遅速論をインド天文学の影響とする飯島忠夫の説は全くの誤りである．なぜなら，当時（AD1世紀）において，インドでは月行の遅速は知られていなかったからである．当時インドで使われていたのは『ヴェーダーンガ・ジョーティーシャ』[18] の暦法であって，これは月も太陽も等速運動するものとしている．

インドで月や太陽の運行の遅速が知られるようになるのは，ギリシア系の天文学がインドに伝来してからのことであって，それは紀元後2世紀頃からのことである．ギリシア系の天文学への言及がある現存最古のサンスクリット語文献は，占星術書『ヤヴァナ・ジャータカ』であって，これはAD 149／150にギリシア語からサンスクリット語訳されたものをもとにして，AD 269／270に韻文化されたものである．[19] そして，AD 2～4世紀頃に導入されたギリシア系の天文学をとりいれて，5世紀末にインドの古典天文学が確立することになる．[20]

以上のことから，李梵と蘇統とが月行の遅速を発見したころには，インドでは月行の遅速は知られておらず，李梵と蘇統との発見は中国における観測によって独自になされたものであることは疑いがない．

それでは，後漢の時代に何らかのインド天文学の知識が中国に伝来した可能性は全くないのだろうか．この点については，前稿[21] においても簡単に指摘したが，その可能性が全くないとはいえない．この問題に関しては，稿を改めて論じることにしたい．

（1992年8月17日初稿）

（1992年11月29日改稿）

☆ 注

1） 藪内清『増補改訂・中国の天文暦法』（平凡社，1990），pp.35～40.

2）『漢書・五行志』（下之下）の原文は，『歴代天文律等志彙編』（十）所収のもの（p.3911）を用いた．なお，『漢書・五行志』については，冨谷至・吉川忠夫訳注『漢書五行志』（平凡社・東洋文庫 460）（1986）も参照（〔史料 1〕の部分は同書では pp.327～328 にあたる）.

3） 中国天文学史整理研究小組『中国天文学史』（北京，科学出版社，1981）p.25. また，藪内，前掲書，pp.68～69 も同様の主旨であろうと思われる.

4） 藪内，前掲書，p.37. また，陳遵嬀『中国天文学史』（第一冊）（上海人民出版社，1980），p.220 も同様の主旨であろうと思われる.

5） 藪内，前掲書，p.38.

6） 中国科学院自然科学史研究所編『銭宝琮科学史論文選集』（北京，科学出版社，1983）所収「漢人月行研究」，p.103.「承認“月或朔見”是暦日後天的結果，并非月行太疾所致，無所謂災異了.」

7） 中国式の度は，平均して太陽が 1 日に 1 度動くように定義されたものである.

8） 例えば，渡辺敏夫『数理天文学』（恒星社，1959），p.138，または長谷川一郎『天文計算入門』（恒星社，1978），p.40 参照.

9） 例えば，渡辺，前掲書，p.262，または荒木俊馬『現代天文学事典』（恒星社，1956），p.219 参照.

10）「朓」と「側匿」については，丁福保『説文解字詁林』（七上，月部）の「朓」と「朒」の条に集成された『説文解字』の諸注に諸史料が引用されており，便利である.（『説文解字』では，朔に月が東方に現れることを「縮朒」と呼んでいる.）なお，長谷部英一「魏晋南北朝の暦論」，『中国哲学研究』第三号（東京大学中国哲学研究会，1991）pp.1～43 の，pp.27～30 にも朓と側匿についての興味深い記述がある. なお，長谷部氏からは，上記の論文のもとになった修士論文『暦論における自然認識とその背景』（1988）も見せていただき，示唆されるところがあった.

11）『初学記』（北京，中華書局，1962）第一冊，p.8 による. なお，現行の『漢書・五行志』とくらべて若干の相違があるが，その問題についてはここではふれない.

12）『太平御覧』（中華書局，1960，上海涵芬楼影印宋本複製重印）第一冊，p.21 による. なお，『周礼』の春官の保章氏の条の疏にも同様の引用がある.

13） テキストは，段玉裁『説文解字注』（台北，芸文印書館，1976. 経韻楼蔵版影印），第七篇上，24 葉裏によった.

14） 中華書局版では，王先謙の『後漢書集解』に引く恵棟の説に「稍，李本「消」に作る」とあるのによって，「余分稍長」を「余分消長」に改めているが，ここではそれはとらず，元のままとする. もし「余分消長」であれば，「端数が少なくなったり多くなったりする」という意味になるが，ここはそうではなく，「余分稍長」すなわち「端数がやや長い」と明言していると見るべきである. 実際，当時の暦法は，太初暦も四分暦も，1 年の長さも 1 か月の長さも真の値より少し長すぎたのであって，当時，太初暦の長すぎる端数を 171 年ごとに切りすてることによって誤差を修正すべきであるという議論があったことが，『続漢志』（中）に書かれている.（拙稿『数学史研究』93 号（1982）p.13 参照.）このように，端数が長すぎることを明確に認識してはじめて，「稍得一日」と自信を持って言えるわけである. もし端数が長すぎるか短かすぎるか明確でなければ，長い間に誤差が変動して相殺し，誤差が一日に達することにはならないかもしれない．という可能性を否定できないであろう.

15） 王先謙の『後漢書集解』（国学基本叢書所収のものを用いた）に引く李氏の説では，この部分を，一部の間に一日の差を生ずるものと解釈し，これを歳差の説のさきがけとしているが，この李氏の説は全くの誤りである. ここでは，賈逵は 76 年の間に一日の差を生ずると言っているのでもないし，これは歳差現象とは全く無関係である.（ちなみに，なぜ李氏がこれを歳差の説のさきがけと解したかというと，歳差現象によって生ずる恒星年と回帰年との差が 76 年間累積すると約 1.08 日になるからであろう.）

なお，「賈逵論暦」の〔史料 5〕の部分にふれた論文として，川原秀城「後漢・四分暦の世界」，『中国思想史研究』第四号（京都大学文学部・中国哲学史研究室，1981）pp.71～104 の，p.89，および，長谷部，前掲論文（1991），pp.5～6 がある.

16） 飯島忠夫『補訂・支那古代史論』（恒星社，1941），第 23 章，p.431.（本書の元版は 1925 年に出ている.）なお，飯島忠夫は，「梵統」が一人の人物の名であると誤認している.

17） 銭宝琮，前掲論文（『選集』所収）p.191.（この論文の初出は 1935 年である.）

18）『ヴェーダーンガ・ジョーティシャ』については，手近なところでは，矢野道雄『占星術師たちのインド』（中公新書，1992年）p.149 以下を参照.

19） Pingree, D.: *The Yavanajātaka of Sphujidhvaja*, 2 vols, Harvard University Press, Cambridge, Mass., (1978). ピングリーの解釈によれば，『ヤヴァナ・ジャータカ』の第 79 章，第 23～25 詩節には太陽と月の運行の遅速について言及されているが，ピングリーはこれをバビロニア系の知識であるとしている. なお，矢野道雄，前掲書，p.107，および矢野道雄『密教占星術』（東京美術，1986）p.16 以下参照.

20） インドの古典天文学については，矢野道雄編『インド天文学・数学集』（科学の名著・1）（朝日出版社，1980）に収録された「アールヤバティーヤ」を参照.

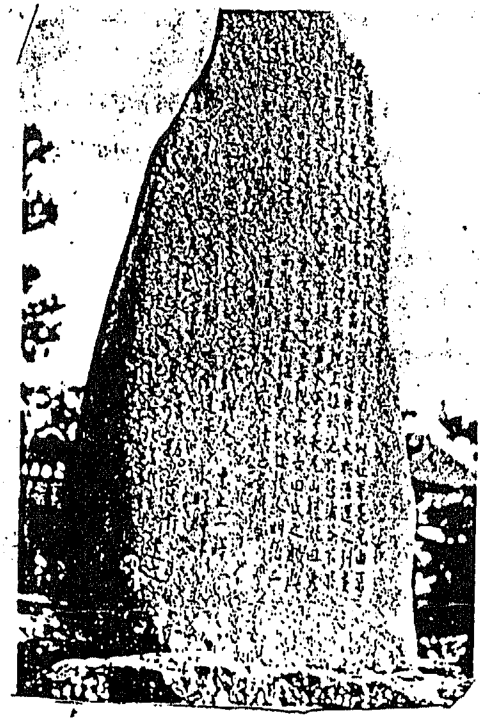
21） 拙稿『数学史研究』93 号（1982）pp.22～23.

落穂集

菖蒲谷池碑

平山　諦

吉田光長，光由によって作られた角倉隧道を記念する菖蒲谷池碑については，先年塵劫記出版350年記念のとき，林屋辰三郎が講演をした．これより先きこの碑に関する記事が昭和七年版『嵯峨誌』に掲載されている．山田悦郎から頂いたコピーに依って記す．



「この細谷に隧道を穿ちて灌漑を開きしは水利長者の名の世に嘖々たる角倉了以翁の一族光長，光由なり．
そもそも上嵯峨の地はもと水源に乏しく，干害甚だ多し．大覚寺宮之を憂い給い，両氏に命ぜられしを以て地理を相して，菖蒲谷の池より山間に洞道を穿つこと百余間，以て水利を通じたり．当時未だ隧道の術開けず，之を作る器機もなかりしに，よく実功を奏して，二百数十年の久しきも更に崩壊の憂なく居民永くその利に頼れり．明治二十二年十二月北嵯峨長浜勘兵衛氏等相議し，一碑を立て菖蒲谷碑という．その表面文字は従三位勲三等北垣国道氏にて，裏面の撰文は左の如し．

菖蒲谷池，大覚寺法親王使嵯峨人吉田了以垤光長，光由築也．了以善水利，琉保津河，鑿高瀬，以通舟筏，大興漕通之利，事詳羅山林先生大悲閣之碑，嘗与親王謀，欲池於菖蒲谷不果而没，寛永之初，二子紹其志，築堤以蓄水，下穿長尾山腹，漑田幾及四十町，北嵯峨到于今，不被干害者，親王与吉田氏之賜也．有志者恐其遺沢或久而泯乎無知，謀勒石以諗後人．明治二十三年庚寅十一月之吉，豊後日出処士宇津憲章撰

銘　　日

立言済世，未必博施，以財興人，恵止一時，水利悠久，爰罔窮期，嗚吁遺沢，永胆斯碑

克斉宍戸茂承書

発起人，長浜勘兵衛，有志，地主旧北嵯峨村中建之」

京都市の西部，ＪＲ嵯峨駅の北方5キロの所に菖蒲谷池がある．長さ1キロの細長い池である．周囲の山の水を集め，北方を流れる清滝川に注いでいた．これを塞き止め，反対の南方の嵯峨の土地を灌漑するために，長尾山腹に長さ150メートルのトンネルを穿って水を流した．これが角倉隧道である．工事以来370年，いまも人々はその恩恵に浴している．

碑文にある了以等の角倉一族の系図は次のようである．

宗忠 {
宗挂—了以—素庵
与左衛門—栄可—栄和—栄甫—与作—光長
六左衛—宗運—周庵—光由—光玄

松永—増淵仮設の補正

清水達雄

増淵の仮設は，合成数に関しては，正しくない．

$$(5\cdot 7)^2 = 21^2 + 28^2$$

素数に関しては

第1群　4で割って1余る数，および2

第2群　4で割って3余る数

証明は，たとえば

高木貞治『初等整数論講義』295～6ページ

平方和方解に，互に素，の条件をつけ

$$C^2 = A^2 + B^2,\quad (A,\ B) = 1$$

とすれば，第1群から2が除かれ，合成数に関しても仮設は正しい．しかし，12で割って，とするのは迂で，また素数3が抜ける．

図　書

和算家・山口和の『道中日記』

著者：佐藤健一・関　邦義・西田知己
Ｂ５判 195 頁　平成５年３月 15 日発行
発行所：研成社　　　　定価 6,500 円

江戸時代の数学が非常に高度で特殊な発展を遂げたことはよく知られている．関孝和や建部賢弘のように幕臣として活躍した人や，藤田貞資のように大名の有馬頼徸に庇護されて研究に明け暮れた数学者もいないわけではないが，大部分の数学者は生活の困窮と戦いながら数学の研究に励んでいたのである．

日本の場合は，西洋でいうところの数学者とはおおいに違う．大部分が農民や商人，あるいは下級武士なのである．昼間の作業を終えて，往復 40 km もの道のりを駆け足で教わりに行き，駆け足で帰ってきたという話は決して珍しい話ではない．

適当な数学の先生が自分の周りに見つからない時，数学の先生が自分の村にやって来てくれるのは有り難い事であった．

数学者の中には遊歴算家と呼ばれる人たちがいた．旅行好きで数学好きの者の生活の手段として，各地を旅行しながら数学を指導したのである．大した金にはならないが，暮らしていけない事はない．どこの村にも数学好きの若者はいるし，庄屋や裕福な農家などの主人は，村の若者の教育を見てくれるという事で大抵の場合は歓迎して迎えてくれた．それに旅行者を温かく迎えるのは素封家の常でもあった．

遊歴算家は日本中どこにでもいたらしい．彼らによって日本の数学がどれほど広く普及されたか，その功績は計り知れない．そのような遊歴算家の中に克明に日記をつけた数学者が何人かいる．中でも佐藤氏らが取り上げた山口和は，指導の旅の日記を『道中日記』と名付け，日本各地の様子を細かく記載している．

『道中日記』には，数学者の日記であるから，各地にある神社・仏閣に奉掲された数学の絵馬（算額）の記録があるのは当然であるが，その他各地の風習・評判・名物などなどが書かれている．したがって，日本各地の当時の状態を知る貴重な記録が盛り込まれている．今回，佐藤氏らによりこの日記が公表され，現代文に書き直されて，さらに注がつけられて出版された意義はきわめて大である．

単に数学史家ばかりでなく，日本史，郷土史，民俗学，言語学，教育史，その他多くの

分野の研究家の見過ごす事のできない貴重な書が世に贈られたと言えよう．

佐藤氏たち，著者の努力と研究に敬意を表するとともに，このようなやっかいな，しかも利益を度外視した出版をこころよく引き受けた研成社に感謝したい．　　（下平和夫）

天野　宏　著　『神奈川県算額集』

グラビヤ９枚（写真 21）　本文 212 ページ　Ｂ５版　　平成４年 12 月発行

著者の天野宏は若い時から神奈川県の和算について研究を進めてきた．復元算額も４面にもなり，また天野により報告された算額も数面になる．

今回のこの出版は，天野を中心とする神奈川県和算研究会（平成４年 12 月６日発足，天野は副会長となる）の旗揚げを記念してまとめられた大著である．

同名の書はすでに昭和 57 年 12 月 12 日に 50 部出版されているが，内容はすばらしいのに粗末な装丁で，しかもごくわずかの人しか見ていないという私家版であった．

10 年たって出版された今回の書は，再版とあるが，前書出版から 10 年の間の天野の研究がにじみ出ている．

神奈川県内の現存している算額はもちろんのこと，消失している算額もできるかぎり記録を調査して紹介している．

神奈川県内の算額 22 面，神奈川県に関係のある県外の算額８面について紹介するとともに，できるだけ現代用語，現代数式でもその内容を解説している．

数学者およびその関係者の記録，和算史関係年譜，内田惣五郎の子孫が保管していた数学教科書の版木の写し等々，数学史を研究する者にとって見逃すことのできない研究書である．

本書は私家版ではあるが希望者には実費で頒布するとのこと．（送料共 4,500 円ぐらい）この書の入手を希望する会員は，直接に天野氏（連絡先は下記）に連絡してほしい．

天野宏：〒 250－03　神奈川県足柄下郡箱根町湯本茶屋 18 番地
　　　　Tel　0460－5－5994

（下平和夫）

会　報

平成4年度　和算セミナー

平成3年度に引き続き，明治大学付属中野高校で開催された「初等和算セミナー」（計5回）が盛況のうちに一段落となった．参加者（名簿登録者）は47名．講師および主な講演内容は下記の通り．

○下平和夫「日本古代の数学（『万葉集』の戯訓ほか）」「中世の数学（なぞなぞの本にある九九）」
○鈴木久男「珠算史は書き換えられる（最近の研究から）」「珠算史の研究史（戦前編）」
○佐藤健一「和算書に見える「利率」（幕府の法令にある利率と算書の利率の比較）」
○西田知己「古文書学の基礎知識（村瀬義益著『算法勿憚改』の読解）」

平成5年度の詳細については未定．

平成5年度（第32回）日本数学史学会年会・総会

本年度は5月23日（日）午前10時より，上智大学4号館175教室にて開催される．会場は先に葉書で通知した3号館から変更になった．

編集後記

1. 会報の欄でもご報告いたしました「初等和算セミナー」ですが，全回の講演の模様をビデオ（8ミリ）に収録してあります．レンタルご希望の方は下記までご連絡願います．

連絡先　〒164　中野区東中野3丁目3番4号　明治大学付属中野高等学校内
日本数学史学会事務局（関　邦義）
電話　03－3362－8704

2. 長らくお待たせいたしましたが，江戸初期和算選書・第三巻（研成社，清水布夫校注『古今算法記』，蔵持信一朗校注『諸勘分物』，西田知己校注『算法勿憚改』所収）が5月に刊行されます．ご希望の方は下記までご注文下さい．

注文先　〒103　中央区日本橋蛎殻町1丁目6番4号　株式会社　研成社
電話　03－3669－1828(代)

（西田知己）

数学史研究

通巻 136号（1993年1月～3月）

発行所 日本数学史学会

〒161 東京都新宿区下落合1丁目7番7号

富士短期大学科学史研究室

電話 東京(03)3368－8826番（出版部）

会費 年額 7,000円

振替 東京2－20022番

印刷所 トーコーワイス

〒260 東京都新宿区矢来町43

電話 (03) －3260－7824番

ISSN 0386-9555

SŪGAKUSHI KENKYŪ

JOURNAL OF HISTORY OF MATHEMATICS, JAPAN

No. 136

January—March, 1993

CONTENTS

ARTICLE

OKUMURA Hiroshi, FUKAGAWA Hisashi; Some Wasan Combinatorial Problems Which Have Never Been Solved .... (1)

TANAKA Mitsuru; On the First Problem of the "Koshigen-kotei" Edited by Ninchou .... (11)

ŌHASHI Yukio; Jia Kui's Theory of Lunar Inequality .... (29)

NOTE .... (42)

BOOKS .... (44)

NEWS .... (46)

Edited and Published by
The History of Mathematics Society of Japan
Fuji Junior College
1-7-7, Shimo-ochiai, Shinjuku-ku, Tokyo, 161, Japan

数 学 史 研 究　　(通巻136号) 平成5年3月25日
東京都新宿区下落合1-7-7　　電 話 (03) 3368-8826 日本数学史学会