ISSN 0386-9555

数学史研究

（通巻 149 号）

1996 年 4 月 ～ 6 月

目　　　次

発行・日本数学史学会

発売・研成社

論　　説

招差法とニュートンの補間公式

内田　孝俊

０．はじめに

n 組の対　$(x_i,\ y_i)$（$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$）が与えられたとき，

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

をみたす　a_i　を差といい，この差　a_i　を導く方法を，ここでは招差法という。[1)]

安島直円の招差捷術（又術）の招差法から差（係数）を定める過程で，ニュートンの補間公式とまったく係数の一致する，すなわちまったく同じ多項式が得られる。しかもニュートンの補間公式では，n 組の（$x_i,\ y_i$）を与えてはじめて係数が定まってくるのであるが，安島の（招差）又術では，それ自体定まっているものである。

招差法は，日本においては，関孝和に始まり，（招差）又術を弧背術に用いたといわれるので，『括要算法元巻』にある，累裁招差之法から始めて招差捷術との関連を述べ，招差捷術の本文中にある又術とニュートンの補間公式の同一を示そうと思う。それをつぎの順序で紹介しながら示す。

１．関の『括要算法元巻』の累裁招差之法

２．安島の招差捷術（又術を含めて）

３．又術とニュートンの補間公式

１．関孝和（？～1708）の累裁招差之法

関の場合は，n 組の（$x_i,\ y_i$）が与えられたとき，

$$y=a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$$

の　a_i（$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$）を定める問題である。すなわち n 次以下の多項式を定める問題である。

つぎのように現在の記号に書き表わして，上段にその当時の呼称を書く。

限数	元積	定積	平積	立積	三乗積	四乗積	……
x_1	y_1	$z_1=\frac{y_1}{x_1}$	$z_1^{\ 1}=\frac{z_2-z_1}{x_2-x_1}$	$z_1^{\ 2}=\frac{z_2^{\ 1}-z_1^{\ 1}}{x_3-x_1}$	$z_1^{\ 3}=\frac{z_2^{\ 2}-z_1^{\ 2}}{x_4-x_1}$	$z_1^{\ 4}=\frac{z_2^{\ 3}-z_1^{\ 3}}{x_5-x_1}$	……
x_2	y_2	$z_2=\frac{y_2}{x_2}$	$z_2^{\ 1}=\frac{z_3-z_2}{x_3-x_2}$	$z_2^{\ 2}=\frac{z_3^{\ 1}-z_2^{\ 1}}{x_4-x_2}$	$z_2^{\ 3}=\frac{z_3^{\ 2}-z_2^{\ 2}}{x_5-x_2}$	…	……
x_3	y_3	$z_3=\frac{y_3}{x_3}$	$z_3^{\ 1}=\frac{z_4-z_3}{x_4-x_3}$	$z_3^{\ 2}=\frac{z_4^{\ 1}-z_3^{\ 1}}{x_5-x_3}$	…	…	……
x_4	y_4	$z_4=\frac{y_4}{x_4}$	$z_4^{\ 1}=\frac{z_5-z_4}{x_5-x_4}$	…	一般に	$z_i^{\ j}=\frac{z_{i+1}^{\ j-1}-z_i^{\ j-1}}{x_{i+j}-x_i}$	……
x_5	y_5	$z_5=\frac{y_5}{x_5}$	…	…	…	…	……

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

下にその例を挙げる。

又ヶ一段限数五，元積一十五，二段限数七，元積二十八，三段限数十六，元積一百三十六，四段限数二十，元積二百一十ハ者。

第一術文があってつぎの表がある。(元積の欄がない)

第		限数(x_i)	定積(z_i)	平積法($x_{i+1}-x_i$)	平積実($z_{i+1}-z_i$)	平積($z_i^{\ 1}$)
	1段	5	3	2	+1	+0.5
	2段	7	4	9	+4.5	+0.5
	3段	16	8.5	4	+2	+0.5
1	4段	20	10.5			

ここに，$z_i=\frac{y_i}{x_i}$，$z_i^{\ 1}=\frac{z_{i+1}-z_i}{x_{i+1}-x_i}$ $(i=1, 2, 3)$

各段の平積が等しくなるので，0.5を以て平差 a_2（最高次の係数）とする。

次に第二術があってつぎの表がある。

第		限数(x_i)	定積($u_i=z_i-a_2x_i$)
	1段	5	(3−0.5×5=)+0.5
	2段	7	(4−0.5×7=)+0.5
	3段	16	(8.5−0.5×16=)+0.5
2	4段	20	(10.5−0.5×20=)+0.5

(正と書いてある所は＋で示した。表中の括弧は筆者)

各段の定積（第二術の定積ということであろう）が等しくなるので，定差 a_1 は0.5である。

こうして，

$$y=a_1x+a_2x^2=0.5x+0.5x^2$$

となるが，この式を変形して，

$$y=\frac{(1+x)x}{2}$$

と，積の形にしていることは注目される。[2)]（このような積の形にする変形は安島にも見られる。)[3)]

$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$ と次数が高くなるにつれて，第三術，第四術，……と計算して行くことになる。

このようにして差（係数）が求められるのはつぎのようなことからである。

この例でいえば，第一術で（2次式になるようになっているが今はこうしておく。)

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots \quad \text{（有限項。以下同じ）}$$

とおくと，

$$z_i=\frac{y_i}{x_i}=a_1+a_2x_i+a_3x_i^{\ 2}+\cdots\cdots$$

$$z_i^{\ 1}=\frac{z_{i+1}-z_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}$$

$$\times\{(a_1+a_2x_{i+1}+a_3x_{i+1}^{\ 2}+\cdots\cdots)-(a_1+a_2x_i+a_3x_i^{\ 2}+\cdots\cdots)\}$$

$$=a_2+a_3(x_{i+1}+x_i)+a_4(x_{i+1}^{\ 2}+x_{i+1}x_i+x_i^{\ 2})+\cdots\cdots$$

$z_1^{\ 1}=z_2^{\ 1}=z_3^{\ 1}[=z_4^{\ 1}=\cdots\cdots]$ となれば $z_i^{\ 1}=a_2$ と確定するとしている。[もし，$z_i^{\ 1}$ が等しくならないならば，さらに，

$$z_i^{\ 2}=\frac{z_{i+1}^{\ 1}-z_i^{\ 1}}{x_{i+2}-x_i}=a_3+a_4(x_{i+2}+x_{i+1}+x_i)+\cdots\cdots$$

となるので，$z_i^{\ 2}$ を比較すればよいことになり，なお等しくならなければ，$z_i^{\ 3}=a_4+a_5\times(x_{i+3}+x_{i+2}+x_i)+\cdots\cdots$ となるので，$z_i^{\ 3}$ を計算することになる。……]（[ ]は今の例に限らない。以下も同じ）

つぎに，今の例で第二術に移ると，

$$z=a_1+a_2x \quad これより \quad a_1=z-a_2x$$

そこで，$u_i=z_i-a_2x_i$ を計算しているのである。ここでも $u_1=u_2=u_3[=u_4=\cdots\cdots]$ であるので，$u_i=a_i$ と確定するとしている（ここはただ，$i=1$ の場合，$u_1=z_1-a_2x_1$ で確定するはずである)。

以上簡単な例で述べたが，とにかく之が累裁招差之法である。[4)]

2．安島直円（1732～1798）の招差捷術，又術

安島の場合は，n 組の（x_i，y_i）によって，

$$y=a_0+a_1x+a_2x^3+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

の差（係数）a_i を定める問題である。定数項 a_0 があるのは前述の累裁招差之法と異なる所ではあるが，前述の z_i を考えれば同じことになる。関と同じく限数，元積，立積，三乗積，……の呼称を用いるが，定積以下は $i=1$ の場合のみに用いている。

限数	元積	定積	平積	立積	三乗積	四乗積	五乗積	……
x_1	y_1	$y_1^1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$y_1^2=\frac{y_2^1-y_1^1}{x_3-x_2}$	$y_1^3=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_4-x_3}$	$y_1^4=\frac{y_2^3-y_1^3}{x_5-x_4}$	$y_1^5=\frac{y_2^4-y_1^4}{x_6-x_5}$	$y_1^6=\frac{y_2^5-y_1^5}{x_7-x_6}$	……
x_2	y_2	$y_2^1=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$	$y_2^2=\frac{y_3^1-y_1^1}{x_4-x_2}$	$y_2^3=\frac{y_3^2-y_1^2}{x_5-x_3}$	$y_2^4=\frac{y_3^3-y_1^3}{x_6-x_4}$	$y_2^5=\frac{y_3^4-y_1^4}{x_7-x_5}$	……	……
x_3	y_3	$y_3^1=\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}$	$y_3^2=\frac{y_4^1-y_1^1}{x_5-x_2}$	$y_3^3=\frac{y_4^2-y_1^2}{x_6-x_3}$	$y_3^4=\frac{y_4^3-y_1^3}{x_7-x_4}$	……	……	……
x_4	y_4	$y_4^1=\frac{y_5-y_1}{x_5-x_1}$	$y_4^2=\frac{y_5^1-y_1^1}{x_6-x_2}$	$y_4^3=\frac{y_5^2-y_1^2}{x_7-x_3}$	……	……	……	……
x_5	y_5	$y_5^1=\frac{y_6-y_1}{x_6-x_1}$	$y_5^2=\frac{y_6-y_1^1}{x_7-x_2}$	……	……	……	……	……
x_6	y_6	$y_6^1=\frac{y_7-y_1}{x_7-x_1}$	……	……	……	一般に，$y_i^j=\frac{y_{i+1}^{j-1}-y_1^{j-1}}{x_{i+j}-x_j}$		……
x_7	y_7	……	……	……	……	……	……	……

下にその例を挙げる。

仮如，甲限数一元積一，乙限数二元積七，丙限数三元積二十八，丁限数四元積八十四，戊限数五元積二百一十〇己限数六元積四百六十二，庚限数七元積九百二十四，辛限数八元積一千七百一十六，問各差。

答曰，五乗差正一，四乗差正一十五，三乗差正八十五立差正二百二十五，平差正二百七十四，定差正一百二十〇約法七百二十〇。

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7$$

（a_0，a_1，a_2，a_3，a_4，……を順に直差，定差，立差，三乗差，……と呼称しているが，直差のない累裁招差之法を除いては呼称はまったく同じ）とおいて，上表にしたがって計

算するとつぎの表になる。ただ術文中には上段第一行の値のみしか記載されていない。

限数	元積	定積	平積	立積	三乗積	四乗積	五乗積	六乗積
$x_1=1$	$y_1=1$	$y_1^1=6$	$y_1^2=7\frac{1}{2}$	$y_1^3=3\frac{1}{3}$	$y_1^4=\frac{5}{8}$	$y_1^5=\frac{1}{20}$	$y_1^6=\frac{1}{720}=a_6$	$y_1^7=0=a_7$
$x_2=2$	$y_2=7$	$y_2^1=13\frac{1}{2}$	$y_2^2=10\frac{5}{6}$	$y_2^3=3\frac{23}{24}$	$y_2^4=\frac{27}{40}$	$y_2^5=\frac{37}{720}$	$y_2^6=\frac{1}{720}$	
$x_3=3$	$y_3=28$	$y_3^1=27\frac{2}{3}$	$y_3^2=15\frac{5}{12}$	$y_3^3=4\frac{41}{60}$	$y_3^4=\frac{131}{180}$	$y_3^5=\frac{19}{360}$		
$x_4=4$	$y_4=84$	$y_4^1=52\frac{1}{4}$	$y_4^2=21\frac{11}{20}$	$y_4^3=5\frac{31}{60}$	$y_4^4=\frac{47}{60}$			
$x_5=5$	$y_5=210$	$y_5^1=92\frac{1}{5}$	$y_5^2=29\frac{17}{30}$	$y_5^3=6\frac{7}{15}$				
$x_6=6$	$y_6=462$	$y_6^1=153\frac{5}{6}$	$y_6^2=39\frac{5}{6}$					
$x_7=7$	$y_7=924$	$y_7^1=245$						
$x_8=8$	$y_8=1716$							

なぜ，$a_7=0$，$a_6=\frac{1}{720}$ となるかといえば，前述累栽招差之法と同様であるが，（x_i，y_i）の組が多いので少し計算は複雑になる。まず，

$$y_i^6=a_6+a_7(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_{i+6})\quad(i=1,2)$$

$$y_1^6-y_2^6=0$$

となるので，

$$y_1^6=a_6=\frac{1}{720},\quad a_7=0$$

としている。つぎに

$$y_1^5=a_5+a_6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)$$

より

$$a_5=y_1^5-(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{720}=\frac{1}{20}-\frac{21}{720}=\frac{1}{48}$$

と定まる。つぎに a_4 の定め方であるが，y_1^4 の計算が複雑になるにもかかわらず，つぎのようにきれいな形をとっているのである。

$$y_1^4=a_4+a_5(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+a_6\{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)x_5$$
$$+(x_1+x_2+x_3+x_4)x_4+(x_1+x_2+x_3)x_3+(x_1+x_2)x_2+x_1^2\}$$

これより，

$$a_4=y_1{}^4-\Bigl[\frac{1}{720}\{(1+2+3+4+5)\times5+(1+2+3+4)\times4+(1+2+3)\times3$$
$$+(1+2)\times2+1^2\}+\frac{1}{48}(1+2+3+4+5)\Bigr]=\frac{5}{8}-\Bigl(\frac{140}{720}+\frac{15}{48}\Bigr)=\frac{17}{144}$$

つぎに　a_3　を求めるのに上述のようにすると，

$$y_1{}^3=a_3+a_4(x_1+x_2+x_3+x_4)+a_5\{(x_1+x_2+x_3+x_4)x_4+(x_1+x_2+x_3)x_3$$
$$+(x_1+x_2)x_2+x_1{}^2\}+a_6(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ \text{の 3 次の同次式})$$

となって，a_6　の項が手間のかかる計算となるためであろうか，つぎのような計算に変えている。つまり，前述の累裁招差之法と同じ方法をとっているのである。ただ求める差（係数）がとんでいるだけである。以上から，

$$a_6=\frac{1}{720},\quad a_5=\frac{1}{48},\quad a_4=\frac{17}{144}$$

と求められたので，これを利用して第二の元積（Y_i　とする）を求め，また前述と同様な計算をするのである。ただ術文中には上段第一行の値のみしか記載されていない。

$$Y_i=y_i-\{(a_6x_i+a_5)x_i+a_4\}x_i{}^4\overset{3)}{=}a_0+a_1x_i+a_2x_i{}^2+a_3x_i{}^3$$

限数	(第二の)元積	定積	平積	立積(立差)
$x_1=1$	$Y_1=\frac{619}{720}$	$Y_1{}^1=3\frac{119}{240}$	$Y_1{}^2=2\frac{23}{90}$	$Y_1{}^3=\frac{5}{16}=a_3$
$x_2=2$	$Y_2=4\frac{16}{45}$	$Y_2{}^1=5\frac{541}{720}$	$Y_2{}^2=2\frac{409}{720}$	
$x_3=3$	$Y_3=12\frac{29}{80}$	$Y_3{}^1=8\frac{91}{144}$		
$x_4=4$	$Y_4=26\frac{34}{45}$		一般に，$Y_i{}^j=\dfrac{Y_{i+1}{}^{j-1}-Y_1{}^{j-1}}{x_{i+j}-x_j}$	

「於是亦推前述求得」とあるのでつぎのように求めたことになる（a_2，a_1，a_0　の値のみ記載されている)。

$$Y_1{}^2=a_2+a_3(x_1+x_2+x_3)$$

より，

$$a_2\ =Y_1{}^2-a_3(x_1+x_2+x_3)=2\frac{23}{90}-\frac{5}{16}(1+2+3)=\frac{137}{360}$$

$$Y_1{}^1=a_1+a_2(x_1+x_2)+a_3\{(x_1+x_2)x_2+x_1{}^2\}$$

より，

$$a_1\ =Y_1{}^1-a_3\{(x_1+x_2)x_2+x_1{}^2\}-a_2(x_1+x_2)$$
$$=3\frac{119}{240}-\frac{5}{16}\{(1+2)\times2+1^2\}-\frac{137}{360}(1+2)=\frac{1}{6}$$

最後に　a_0　であるが，

$$Y_1\ =a_0+\{(a_3x_1+a_2)x_1+a_1\}x_1$$

より，

$$a_0\ =Y_1-\{(a_3x_1+a_2)x_1+a_1\}x_1=\frac{619}{720}-\frac{619}{720}=0$$

このようにして，差のすべてが求まる。

$$a_0=0,\quad a_1=+\frac{1}{6}=+\frac{120}{720},\quad a_2=+\frac{137}{360}=+\frac{274}{720},\quad a_3=+\frac{5}{16}=+\frac{225}{720},\quad a_4=+\frac{17}{144}$$
$$=+\frac{85}{720},\quad a_5=+\frac{1}{48}=+\frac{15}{720},\quad a_6=+\frac{1}{720}$$

つぎに今の例で又術について述べる。

前述で述べた元積，定積，平積以下を書き並べるとつぎのようになる。

$$y_1=1,\ y_1{}^1=6,\ y_1{}^2=7\frac{1}{2},\ y_1{}^3=3\frac{1}{3},\ y_1{}^4=\frac{5}{8},\ y_1{}^5=\frac{1}{20},\ y_1{}^6=\frac{1}{720}$$

いずれも 720 倍して，定数として，

$$y_1=720,\ y_1{}^1=4320,\ y_1{}^2\fallingdotseq5400,\ y_1{}^3=2400,\ y_1{}^4=450,\ y_1{}^5=36,\ a_6=y_1{}^6=1$$

とする。

天元ノ一ヲ立テ限数，甲限差，乙限差，
丙限差，丁限差，戊限差，己限差

術文は内側の括弧より順次計算の結果を示すが，それを一まとめにすると，つぎのようになる。

$$y=[[\{\{(a_6(x-6)+y_1{}^5)(x-5)+y_1{}^4\}(x-4)+y_1{}^3\}(x-3)+y_1{}^2](x-2)$$
$$+y_1{}^1](x-1)+y_1\quad(☆)$$
$$=x^6+15x^5+85x^4+225x^3+274x^2+120x+0$$

と，求める差（係数）の現われた多項式が求められる。したがって約法を考慮に入れれば，

$$y=\frac{1}{720}(120x+274x^2+225x^3+85x^4+15x^3+x^6)$$

約法 720 を無視して文字で表わすとすれば，

$$(☆)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$$

と，求める差　a_i　が現われているとするのである。なぜかといえば，

$x=x_1$ とおくと $y=y_1$，$x=x_2$ とおくと $y=y_2$，……，$x=x_6$ とおくと $y=y_6$ となるからである。[5)]

招差捷術の末文に立差を求めるには，初術あるいは又術を，三乗差以上は又術で求めるのが便利である，といっている。[6)]

3. 又術とニュートンの補間公式

前述の式（☆）は限差をそのままにして展開するとつぎのようになる（各限数１，２，３，４，５，６を文字 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6 に戻して書く）。

$$y=y_1+y_1^1(x-x_1)+y_1^2(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+y_1^3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$+y_1^4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$+y_1^5(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$$
$$+a_6(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6) \qquad (a_6=y_1^6)$$

一般に書けば，（$a_n=y_1^n$ と定まったとする。）

$$y=y_1^0+y_1^1(x-x_1)+y_1^2(x-x_1)(x-x_2)+\cdots\cdots+y_1^n(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots$$
$$\times(x-x_n) \qquad (1)$$

他方，ニュートンの補間公式は，

$$y=f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-x_1)+\lambda_2(x-x_1)(x-x_2)+\cdots\cdots+\lambda_n(x-x_1)$$
$$\times(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n) \qquad (2)$$

であって，両者はまったく同一の式である。

ここに，$\lambda_j=y_1^j$ であって，（以下 $j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots n\,;\ y_1^0=y_1$）

(1)の係数 $y_1^j=\dfrac{y_2^{j-1}-y_1^{j-1}}{x_{j+1}-x_j}$

は，$y_1^0=y_1$ より順に y_1^1, y_1^2, ……, y_1^n と直接求められるのに対して，(2)の係数 λ_j は，

$x=x_1$ を代入して $y_1=\lambda_0$

$x=x_2$ を代入して $y_2=\lambda_0+\lambda_1(x_2-x_1)$ より $\lambda_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$x=x_3$ を代入して $y_3=\lambda_0+\lambda_1(x_3-x_1)+\lambda_2(x_3-x_1)(x_3-x_2)$ より

$$\lambda_2=\frac{y_3(x_2-x_1)-y_2(x_3-x_1)+y_1(x_3-x_2)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)}$$

と間接的に求めなくてはならないのである。いずれにしても繁雑な式になる。たとえば λ_3 は，

$$\lambda_3=\frac{y_4(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)-y_3(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_2-x_1)+y_2(x_4-x_3)(x_4-x_1)(x_3-x_1)-y_1(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_3-x_2)}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)}$$

となる。以下。[7)]

4. おわりに

累裁招差之法（以下 Ⅰ．とする）と招差捷術（又術を除いて，以下 Ⅱ．とする）の計算について少し書いてみると次のようである。

まず最初に求める最高次の差の求め方は Ⅰ．（第一術）も Ⅱ．も同様である。つまり，途中の計算

$$z_i^j=\frac{z_{i+1}^{j-1}-z_i^{j-1}}{x_{i+j}-x_j} \quad と \quad y_i^j=\frac{y_{i+1}^{j-1}-y_1^{j-1}}{x_{i+j}-x_j}$$

は，本質的に変わりはないのである。この後の差の求め方が少々変わってくる。Ⅰ．の方は最高次の係数 a_j が求まると，$z_i=a_1+a_2x_i+\cdots\cdots+a_jx^{j-1}$ に戻って第二術として，

$$u_i=z_i-a_jx_i^{j-1}=a_1+a_2x_i+\cdots\cdots+a_{j-1}x_i^{j-2}$$

を定積（といっている） u_i として，第一術で求めたように a_{j-1} を求めて行くのである。以下第三術，……として同じように a_{j-2}，a_{j-3}，……，a_2，a_1 と求めて行く。

他方，Ⅱ．の方は，$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_jx^j$ の最高次の係数 a_j が求まると，

$$y_1^{j-1}=a_{j-1}+a_j(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_j)$$

より

$$a_{j-1}=y_1^{j-1}-a_j(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_j)$$

として，a_{j-1} をもとめ，つぎに，

$$y_1^{j-2}=a_{j-2}+a_{j-1}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{j-1})+a_j\{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{j-1})$$
$$\times x_{j-1}+(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{j-2})x_{j-2}+\cdots\cdots+(x_1+x_2)x_2+x_1^2\}$$

より移項して a_{j-2} を求める。つぎの y_1^{j-3} になると

$$y_1^{j-3}=a_{j-3}+a_{j-2}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{j-2})+a_{j-1}\{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{j-2})$$
$$\times x_{j-2}+(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{j-3})x_{j-3}+\cdots\cdots+(x_1+x_2)x_2+x_1^2\}+a_j$$
$$\times\{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{j-2}\ \text{の３次の同次式}\}$$

となって，右辺の a_j の項が複雑な計算になるからであろうか。一転して，

$y_i=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots\cdots+a_jx^j{}_i$ に戻って，

$$Y_i=y_i-\{(a_jx_i+a_{j-1})x_i+a_{j-2}\}x_i^{j-2}=a_0+a_1x+a_2x_i^2+\cdots\cdots+a_{j-3}x_i^{j-3}$$

を第二元積（といっている）Y_i として，y_i のときの最高次以下の係数を求めたときのよ

うに求めて行くのである。一転して第二元積とする所は，Ⅰ．の第二術以下と同じであるが，一挙に差が2つばかり間がとんでいる。

つぎに招差又術から得られた(1)とニュートンの補間公式(2)とを比べてみると，(1)の係数を導き出すまでは，計算は冗長になるにしても，その式自体として係数　$y_1{}^j$　は求められているのに対して，ニュートンの方は，$(x_i,\ y_i)$ の値の組を与えて求めなくてはならないという間接的な計算を必要とする。何れにしても安島の又術からニュートンの補間公式とまったく同一の式が得られることを指摘したかったのである。[8)]

なお，(1)，(2)の形よりは，(☆)の積の形の方がよいのではと考える。そして(☆)の式そのものが，ニュートンの補間公式と同一といってもよい。

最後につけ加えると，招差捷術の末文の終りに「……括要算法弧背術密用招差又術者也可秘」とある。関孝和は，この又術を利用して弧背術を研究したとしているのである。[6),9)]

終りに下記参考編・著書を使用させて戴きましたことを厚く謝します。

以上は数学史研究発表会(第2回)(平成7年9月23日)において発表したときの資料を元としたものである。未詳の部分は後日に譲りたいと思う。御教示賜れば幸と存じます。

参考編・著書

［1］　平山・下平・広瀬編著『関孝和全集全』pp275～282 大阪教育図書k.k.（関孝和全集刊行会）平成7年3月10日（初版第2刷）

［2］　平山・松岡編集『安島直円全集』pp117～112 安島直円全集刊行会出版，富士短期大学出版部，昭和58年3月10日

［3］　平山諦著『関孝和—その業績と伝記—』pp140，142，171，恒星社厚生閣，平成5年7月15日（増補3刷）

［4］　加藤平左エ門著『算聖関孝和の業績』pp201～203，槇書店，昭和47年1月20日

注

1)　［3］p140.……これらの差を求めるのが目的であるから，「差を招く」すなわち招差法の名が生じた。

2)　［1］p277.「本術，平差一ヲ置テ限数ヲ以テ之ヲ乗シテ以テ定差一ヲ加テ又タ限数ヲ以テ之ヲ乗シテ二ヲ以テ之ヲ約テ元積ヲ得ル也。」

3)　［2］p121.「置各限数，乗五乗差，加四乗差，乗各限数，加三乗差，乗各限数三乗冪，以減各元積，為第二各元積，以求立差以下。」

4)　［3］p142.……最初に掲げた原文中に括弧して「古所謂三差之法也」とあるは，孝和は中国の暦書『授時暦経』『天文大成管窺輯要』などから招差法を学んだためである。

5)　［4］pp202，203 を参照。

6)　［4］p203. 本書の最後のところに，この又術は求める　a_0，a_1，a_2，……が3つ以上におよぶとき

便利であると述べ，さらに括要弧術は密にこの又術を使っていると述べているのである。

7)　［3］p171. こに六個の矢　c_0，c_1，c_2，c_3，c_4，c_5　の価に対して，それぞれ六個の背　s_0，s_1，s_2，s_3，s_4，s_5　の価が計算できたことになる。孝和はこれを材料として補間公式を作り，その係数を決定しようと意図したのであった。孝和の著書にはどこにもこの補間公式は書き表わしてない。ただその係数を計算する方法だけが克明に述べられている。ために多くの和算家は，孝和がかかる思想に達したことは気付かれなかった。つぎに述べるような補間公式を文章で述べることは多くの困難を伴ったことであろう。これを簡単明瞭に表現する記号の発達しなかったことは和算の欠点である。本書9ページで述べた弧矢弦起源演段とはこの計算を指している。この公式をはじめて指摘したのは三上義夫であった（東京数学物理学会記事第2期第7巻第7号，1913，157～170ページ）。

われわれにはこの補間公式からさきに説明した方がわかり易い，孝和は，

$$s^2=a^2+c^2\Big\{A_0+A_1\frac{c-c_0}{d-c}+A_2\frac{(c-c_0)(c-c_1)}{(d-c)^2}+A_3\frac{(c-c_0)(c-c_1)(c-c_2)}{(d-c)^3}$$
$$+A_4\frac{(c-c_0)(c-c_1)(c-c_2)(c-c_3)}{(d-c)^4}+A_5\frac{(c-c_0)(c-c_1)(c-c_2)(c-c_3)(c-c_4)}{(d-c)^5}\Big\}$$

と仮定して，$c=c_0$，c_1，c_2，c_3，c_4，c_5　になるとき　$s=s_0$，s_1，s_2，s_3，s_4，s_5　になるように係数　A_0，A_1，A_2，A_3，A_4，A_5　を決定し，……

8)　［2］p118. 招差法は現代数学で言えば，函数概念を得る一歩手前までいったと言うことができるが，和算ではついに函数概念は得られなかった。

9)　［2］p118. 巻末に「括要算法弧背術密用招差又術者也可秘」とあるは注目すべきである。古来，関孝和の括要算法の弧背術はいかなる方法で計算したか不明であった。安島はこれを理解したものか。

（平成7年12月1日受理）

和算の発達
――「達人」観の変遷を中心に（２）――

西田　知己

Ⅲ　江戸中期の「達人」

今，便宜的に江戸中期と仮称したのは，17 世紀後期から 18 世紀前期あたりまでの時期をさしているものとする。これと前後する時期に関孝和やその高弟だった建部兄弟らが登場し，和算は急速に発達していった。それでも18世紀前期あたりまでの段階では，伝統的な「道」や「達」の面影も見受けられる。その中から「道」を1例，「達」を2例参照してみる。

「道」については，関孝和の『括要算法』の序文を取り上げる。『括要算法』は，孝和の高弟荒木村英の門下生だった大高由昌が孝和の没後に出版した遺著である(宝永 6 年, 1709 序跋，正徳 2 年，1712 刊)。その序文で，由昌は以下のように述べている。

> 夫数之道タル，其ノ源聖人ヨリ出テ，其ノ来ルコト遠シ。故ニ理甚向上ニシテ，未得・為得ノ浅識ニ非ス也。然モ円法・孤(弧)矢弦等ノ奥旨ニ至テハ，則兀々トシテ煩スルカ如ク悩スルカ如ク，可非ヲ決シ難シ。此ヲ以テ，一法ノ合ヘルヲ見テ，万法ノ則ト為シ，其ノ一ニ合テ二ニ違コトヲ知ラサル也。算法亦邪術夥(オホ)シ。察セスンハフル可カラス。関氏孝和先師有テ，始テ其ノ理明ニ，其ノ道開ケヌ也。而モ昔人ノ未タ発セサルヲ発ス。愚，荒木村英ニ頼(ヨツ)テ，関氏先生之道ヲ得タリ。蓋シ是ノ術広ク世ニ行レテ衆人ト與(トモ)ニ邪ヲ闢キ，正ヲ弁センコトヲ願フ也[21]。

「数之道」は往古の「聖人」に由来し，永年に渡って「向上」してきたが，「円法・弧矢弦等」すなわち「円理」的分野の奥義を極めるのは容易でなく，現に過去には「邪術」も多かった。そのような混沌とした状況の中から関孝和が登場して「道」が開かれ，拙者大高由昌は直接の師匠である荒木村英に教えを請うて「関氏先生之道」を修得したとある。

数学を「聖人」の創始した「道」の世界ととらえており，中国的な「道」の考え方を下敷きにした文章となっている。言葉こそ「達人」を使っていないが，孝和は「円理」研究の「道」を開いた人物として，なかば絶対視されている。これは関流の始祖に対する敬意から発した賛辞といえる。なお孝和は後世「算聖」と称され，その尊称を刻んだ墓碑や石

碑が各地に建てられた。

伝統的な「達」概念の例の第 1 は，東房軒が元禄 16 年 (1703) に刊行した『数道初述前集』である。数学書に説かれた「道」については，すでにいくつかの実例を見てきたが，書名に「道」を冠した例は非常に少なく，最も一般的だった「算法……」(または「……算法」) のほかには「算学」「算術」「算用」「算経」などが主に使われた。古代中国における律令制のもとで大学寮に設置された「四道」(四学科) のひとつに「算道」があり，この言葉も律令制の導入にともなって日本語の語彙に加わったが，江戸時代の数学書の題名には使用されなかった。

よって『数道初述前集』は，「道」の色合いを前面に出した異色作ともいえる。内容的に見ても「達人」とか「修行」といった言葉が好んで使われており，あるべき「達人」像が明示されている。たとえば上巻に収録されている「修行ノ大意十ヶ条」の第 5 条には，以下のように記されている。

> 第五，(或人) 達人ニ成ベキ様ヲ問。丈 (著者の師，田中佳政) 曰，凡ソ人ノ修行スルホドハ，世ノ人ニ功ヲ知ラルル際ニテ止ムモノナリ。達人ニ成ベキ其人ハ，止ムコトナク，尋常ノ人ノ耳目ニ知ラレヌ所ヲ久々修行シテ達スルナリトノ答ナリ[22]。

「修行」の成果として「達人」になれる，といった趣旨の文章である。常人は数学的な学識によって多少の名声を獲得すれば，それでよしとするが，「達人」たるべき人物はそこで満足しない。むしろ他の人が気付かない箇所にまで着目して修行を積み重ねるからこそ「達スル」，と説明されている。「達」という字を用いており，一見芸道風の書き方となっているが，まだ手が付けられていない方面で「達スル」となれば，結局は独自の視点を持って新たに研究を促進させるしかない。数学研究の進歩という考え方がなければ，おそらく出てこない提言であり，理想ないし完成形態への到達を意味する伝統的な「達」概念とは同格扱いできなくなっている点に，新しさが感じられる。

「達」の 2 番目は，建部賢弘が書いた『綴術算経』と『不休建部先生綴術』(ともに享保 7 年，1722 序) である。賢弘は関孝和の門弟中随一といえる人物であり，その著『綴術算経』は彼の著述の中で最も独創的と評されている[23]。

書名にある「綴術」の二文字は，宋 (南朝時代の劉宋) で活躍した暦学・数学者だった祖沖之の著『綴術』から採られている[24]。『隋書』(巻 16・志第 11・律暦・上・備数) によると，円周率は古来より 3 が使用されており，その後も粗雑な数値や算出方法が多かったが，祖沖之が精密な算法を確立して「約率」(22／7) と，より精密な「密率」(355／113) を得たとある。続けて，学者さえ『綴術』の奥深さを究めることができなかったと付記されている (「所著之書，名為綴術，学官莫能究其深奥」[25])。『綴術』は早くから失われており，具体的な内容は知る由もないが，円に関する祖沖之の研究は後々まで高く評価されて

いた。

その『綴術』から名をとった『綴術算経』を見ると，祖沖之を「達人」と称した記載が序文の後ろの方に出てくる。現存する賢弘の自筆本には，

熟ク思フニ，沖之ハ是レ上古ノ達人ト謂フヘシ。蓋シ其ノ玄妙ノ真実ハ聴テ識ルヘカラス，思フテ得ヘカラサル者乎[26]。

と記されている。序文の別の箇所では，『隋書』の記載と称して前掲の「所著之書，名為綴術，学官莫能究其深奥」が引用されており，『綴術算経』の「熟ク思フニ」以下も『隋書』の祖沖之評を敷き写した称賛の仕方となっている。それでも「達人」という言い方に関しては，「上古ノ」と前置きして時代を限定しており，自分たち和算家の水準と比較した場合どうなるか，といった点は不問に付している。

この『綴術算経』の姉妹編と呼べる一冊が，『不休建部先生綴術』である。全体的な内容は似かよっているが，『不休建部先生綴術』は『綴術算経』の問題を簡単な方から高度な方に配列するなど教科書的に編集されており，そのためか筆写に筆写が重ねられて『綴術算経』よりも広く普及していた。その『不休建部先生綴術』で先の序文の箇所を見ると，「達人」に付けられた形容が『綴術算経』と異なっている。

嗚呼沖之ハ絶代ノ達人乎，宜ナル哉，其玄妙ノ真理，学テ識ヘカラス，力テ得ヘカラサル耳[27]。

「上古ノ達人」ではなく「絶代ノ達人」と称されており，祖沖之は時代を越えて君臨する大家として絶対視されている。孝和を称賛した『括要算法』の序文と同様，これを祖沖之への敬意ととらえ，敬意のはらい方では『綴術算経』よりも『不休建部先生綴術』の方が上だったと解釈すれば，それはそれでひとつの無難な解釈が成り立つ。しかし同時に，頂点に達した人を意味する伝統的な「達人」観による揺り返しを想定することも，一切不可能ではないように思われる。

このような伝統的「達人」観の揺れの問題をよそに，孝和の没後も賢弘をはじめとする和算家によって数学研究は進められ，従来の水準を圧倒的に引き上げた孝和でさえ後世には乗り越えられてしまった。その事実は，絶対的な到達点を想定できないという認識の確立を決定的にしたと推測できる。

Ⅳ　江戸後期の「達人」

18 世紀中期から 19 世紀に入る頃になると，「達」の相対性が一層明確に意識されるようになっていった。今この時期を江戸後期と仮称し，その頃に書かれた著述の中から「達」関連の記載を参照してみる。

関孝和を始祖とする和算の系譜は関流と呼ばれ，第一伝荒木村英，第二伝松永良弼，第三伝山路主住というように，次第に関流何伝と称されるようになった。その過程で 5 段階の免許制度が成立し，この 5 つを得てはじめて関流何々と名乗ることが許された。こうした制度の詳細について確かなことはわからないが，第三伝の山路主住によって確立されたと考えられている[28]。

その関流についてまとめた記録に，『関算完伝』がある（安永 9 年，1780 序）。著者の戸坂保佑は中西流という一派に属していたが，宝暦 3 年（1753）から同 8 年までの間は山路主住に師事して関流を学んでいた。その時期に主住から得た伝書をのちに編集して，4 種にまとめた。これは関算四伝書と呼ばれ，『関算前伝』『関算後伝』『関算要伝』『関算完伝』から成る。その中の一書，『関算完伝』の序文には関流の系譜が簡単に列記されているが，そこに「達人」の語が見える。

関夫子，固和漢之一人，算之聖者也。故其門人等，亦明敏博識之徒，相続而起，乃建部三俣沢口荒木中根松永山路之人々，中西久留島等之達人，乃今藤田安島之輩……[29]

関孝和に対しては，「算聖」を連想させる「算之聖者」という表現が使われている。続けて建部兄弟以下，三俣久長（孝和の初期の著書『発微算法』の校訂者のひとり），沢口一之（彼を孝和の弟子とする解釈には疑問が残る），荒木村英，中根元珪，松永良弼，山路主住，さらには中西正好（中西流の祖），久留島義太の名を列記し，彼らを「達人」と称している。彼らの間にも師弟関係や時間的な前後関係があり，研究水準や知識量では後続研究者の方が優位となるはずだが，保佑は「達人」と総称して同列に並べている。

「算之聖者」という表現には，和算の世界に生きていた「道」の観念から導き出された聖人君子的な人物像が重ね合わされているのかも知れないが，その一方では「達」が使いにくくなってきた実情が影を落としていたように思われる。そもそも高名な和算家を一律に「達人」と呼び通す気ならば，孝和も「達人」で構わないはずである。それでも「聖者」と呼び分けたのは，「達人」が十把ひとからげの尊称だということを，書いた保佑自身が重々承知していたからであろう。「達人」から最高の到達者という原義が失われてしまったら，尊敬する始祖の称号には向かなくなってしまうのである。

江戸後期の数学的な「達」の第 2 の実例は，『算法許状及印可』に付記されている一文で，経世家として名高かった本多利明が寛政 9 年（1797）に書いたものである。そこには内藤政樹と松永良弼について記されている。内藤政樹は享保 3 年（1718）7 月に磐城平藩主内藤義稠の養子となり，同年 12 月には備後守に任ぜられた。延享 4 年（1747）には日向国延岡に移封されている。松永良弼はもともと久留米藩の浪人で，荒木村英に数学を学び，享保 17 年（1732）に備後守だった政樹に仕えた。

利明は，その松永良弼と内藤政樹の数学的な能力について指摘しており，文中に「達」関連の表現が出てくる。

松永氏は内藤備後守殿に仕へ最達識之算師なり，扨又主なる備後守殿も又達算なり[30]。

後半では，政樹の数学能力をたたえて「達算」と表現している。「達算」という言い方の起源については定かなことはわからないが，おそらく江戸中期になってから普及した模様である。遺題本『塵劫記』に記されていた「算勘の達者」のような表現が徐々に煮詰められていったのであろう。18 世紀に入る頃には「勘」の価値が下落していたためか，「達勘」という言葉は説かれなかった。

注目したいのは，良弼の数学的な優秀さをたたえた「最達識之算師」という独特の言い回しの方である。「達算」を到達点の意味で使うと，それに「最」を上乗せしても意味をなさないが，備後守を「達算」と評価したかった利明はあえて「最」の字を追加し，もう一段階上の良弼を言い表わそうとした。まさに苦肉の策といえる対処方法となっている。

ところで内藤政樹に仕えていた和算家には，松永良弼のほかに久留島義太がいた。両者は親友であり，良弼に次ぐ関流第三伝となった山路主住は義太にも師事していたが，数学的な能力では良弼よりも義太の方が高く評価されていた。すると，もし「達」の文字を使って義太を称賛しようとするならば「最」以上の形容が必要になり，表現方法がいよいよ手詰りになってくる。「達」に何かを上乗せするという言い方自体に，そもそも無理があったということである。

十把ひとからげの「達人」を聖人君子的な「聖者」の一段下に置いたり，「最」の字を上乗せして「達算」と区別したりするのは，伝統的な「達」概念からはおよそ出てこない発想である。江戸後期の和算における「達人」像の揺れを，そこに感知できる。しかしこのような混乱ばかりではなく，一方では数学の恒常的な進歩と相対的な発達を見すえて「達人」像を練り直そうとする和算家も徐々に育っていた。本稿の最後に引用する会田安明は，そのような考え方を明確に示した代表的な人物だった。

明和 6 年 (1769) に山形から江戸に出た安明は，普請役として土木治水工事を担当した。同じ普請役の神谷定令が関流和算家，藤田貞資の弟子だったため，定令に貞資を紹介してもらったが，些細なことから弟子入りを断念した。そうしたいきさつもあって，安明は貞資の著『精要算法』を批判した書『改精算法』を刊行している。関流に対して最上流を創始したことも，広く知られている。郷里の東北を中心に活躍し，全国に多くの弟子を持った。

安明が生涯をかけてあらわした著述は，2000 冊を越える。晩年に相当する文化 7 年 (1810) に刊行した『算法天生法指南』は，名著として広く読まれた。その『算法天生法指南』の序文で，安明は 50 年におよぶ自己の数学研究の歩みを振り返って，以下のようにいう。

予算法ヲ嗜ミ精密ヲ尽スコト五十年，発起スルモノ甚多シ。然レトモ限リ尽スベキ道ナラネバ，未ダ尽サザルモノモアラン。只生涯此道ヲ弄ビ楽ムナリ。洩タルモノハ，

後学ノ知考ヲ俟ツノミ[31]。

数学研究に対する自負が読み取れるが，「算法」は万全を期することのできる「道」ではないとも割り切っている。よって自分はその「道」に気楽に取り組み，至らぬところについては後進の研究活動にまかせたいと述べており，後世の進歩を前提にした書きぶりになっている。

その安明が 3 年前の文化 4 年 (1807) に書いた未刊の一書に，『算法千里独行』がある。序文に相当する記載が冒頭にあり，安明の「達算」理解については，こちらの方が参考になる。まず安明は歴代の関流和算家を列記して，以下のようにいう。

我朝延宝天和ノ年間，関新助孝和ト云算学士アリ。此人其時代ノ達算ニシテ，其名世ニ高シ。其後学等関流ノ元祖ト唱スル者是ナリ。其門下ニ荒木村英，建部賢弘ノ二士アツテ其名世ニ鳴ル。其後学中根元珪，松永良弼等アリテ，関流ノ算術益世ニ行ル。猶コノ比(頃)，藤田定(貞)資，安嶋直円等アツテ，達算ニシテ其名世ニ高シ。且定資ヲ以テ，海内ノ一人ト称ズ。乃シ関流ノ点鼠法ハ松永氏ニ出テ，藤田氏ニ至テ成ル故ニ，定資ハ関流古今ノ随一ナリ。右ノ輩各其世々ノ達算ナリ[32]。

関孝和は数係数の高次方程式を解く中国渡来の天元術を改良して演段術を考案したが，演段術をさらに改良して点鼠術を確立したのが藤田貞資だった。『算法千里独行』では，その孝和から貞資までの系譜が綴られている。先の『関算完伝』の文章と割合似ているが，「達人」解釈という点では似て非なる内容となっている。安明は孝和の名声の高さについて最初に記しているが，同時に「此人其時代ノ達算」と評して時代を区切っているからである。そのほかに安島直円や松永良弼の名を出して皆「達算」であると称しているが，やはり「各其世々ノ」すなわち各時代ごとの，と付記しており，活躍した時代の後先を問わず一律に「達人」と称していた『関算完伝』の書き方とは異なる。続く一節では，この「達算」解釈について，さらに詳しく吟味している。

然リトイヘトモ，未タ数術明ラカニ開ケザル以前ノ輩ナレハ，真ノ達算ニハアラズ。下手ノ中ノ上手，鳥ナキ里ノ蝙蝠ニシテ，今ノ世ニ比レバ讃美スヘキ輩ニハアラズ。只其世ニ対シテ，達算ナルコトヲ知ルベキノミ[33]。

列記した関流和算家に対して，数学が明らかに開ける前の人たちだから「真ノ達算」ではないと辛目に評価し，「下手ノ中ノ上手」すなわち下の上と断じている。鳥ほど空を自在に飛べないコウモリでも，鳥がいない地域ならば空の覇者になれる，といった皮肉めいた比喩も書き足されている。現在と比較すると過去の和算家の業績は見劣りするから，結局「達算」といっても「其世ニ対シテ」すなわち各時代ごとに規定すべきである，と結論づけている。

関流に対抗する最上流の創始者としての気概と自負が伝わってくる文章となっているが，

かといって最上流が完成品といっているわけではなく，自派とて「其世ニ対シテ」評価されるべきことは当然安明も心得ていた。だから『算法天生法指南』の序文にあったように，自分の不備については後進の研究活動にまかせる，という言葉が出てくるのである。

おわりに

数学研究に取り組む姿勢が継承され，恒常的な発展が実現するようになると，伝統的な「達」概念が根底から問い直されるようになる。後世の相対的な発達が見込まれるようになると，絶対的な到達をさす「達」が成り立たなくなり，結局誰も「達人」を名乗れなくなってしまう。江戸中期以降の和算関連の文章に見られた「達」解釈の揺れは，芸道寄りに受け止められていたジャンルが徐々に学問的な世界に接近していく，その兆候と解釈できる。

ところで研究活動の相対的・段階的な発達を認め，従来の「達人」観の上限を取り払った安明は，一方で数学研究の「道」に邁進すべきことを説いていた。「達」と不即不離の伝統思想でありながら,「道」については特に規定し直す必要を感じていなかった模様である。安明に限らず，江戸後期以降になっても数学研究の「道」という捉え方は生きており，現在でも十分通用する。すると，到達点の有無を越えて存在するのが「道」であると受け止められていたのかも知れないが，それでもなお「達」の変化は,「道」にも影響を与えていたように思われる。この点に関する見通しを簡単に付記し，結びにかえたい。

倫理道徳的・芸道的な「道」を極めるための修行の場では，始祖や大家がいったん確立した草創期ないし全盛期の「道」を模範として日夜精進が積み重ねられる。一方，和算の「道」においても過去の研究業績の習得は第一に着手すべき課題といえるが，和算家の最終課題は未来への展開の方にある。時代の違いを越えた普遍的な真理ないし価値の探究が標榜されている道徳的・芸道的な「道」においても，未来への展望は当然意識されているが，和算的な「道」はすべてその方向に収斂されていく。安明の言葉を裏返すならば，過去の数学を祖述するだけでは「道」の修行と呼ぶに値しない，とさえいえる。

『括要算法』の序文に「関氏孝和先師有テ，始テ其ノ理明ニ，其ノ道開ケヌ也」と記されていたように，和算研究の「道」とは結局,「歩んで行く」という以上に「切り開く」べきものであると理解されるようになっていった。従来の「道」の世界では通例,「開く」といえば始祖や大家の偉業として説かれる部分であり，その意味では孝和を始祖的に扱った『括要算法』の書き方も，伝統的な「道」の考え方に近い。それでも現実的には，孝和以降の後続和算家も（程度の差こそあれ）「開く」という感覚を共有できるようになったのである。誰も「達人」を名乗れなくなった代わりに，誰でも始祖を名乗る可能性が開けたと書いたら，凝った表現に流れることになるだろうか。

このような独特の「道」認識が育ったのは，継続的な実践活動の場としての「道」が，個人単位の修行の枠を越えて後世に継承されるようになったからである。それが和算的な「道」の新しさといえる。過去の歩みをふまえる点では伝統的な「道」と一致しているから，まったく一新されたわけではなく，したがって，仮に「道」概念の拡張と把握しておきたい。このような江戸時代的な「道」概念の展開もまた，幕末維新期以降に本格化した西洋的な進歩史観の受容を円滑化したと考えられる。

注

21) 日本学士院所蔵『括要算法』巻元，1 丁。平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編『関孝和全集』大阪教育図書，1974 年，271 頁。
22) 前掲『明治前日本数学史』第 3 巻，512 頁。原本は東北大学所蔵本。
23) 『綴術算経』の意義については，村田全『日本の数学　西洋の数学　比較数学史の試み』(中公新書 611，中央公論社，1981 年) に詳しい。
24) 『綴術』は実子の祖暅によって，最終的にまとめられたとも考えられている (銭宝琮編・川原秀城訳『中国数学史』みすず書房，1990 年，90 頁以降参照)。
25) 中華書局校訂『隋書』2 (志)，中華書局，1973 年，388 頁。日本数学史上，本格的な円周率計算の端緒となった村松茂清の『算俎』の巻 4 にも，祖沖之の円周率計算について若干言及されている (前掲『算俎』159-60 頁)。
26) 内閣文庫所蔵『綴術算経』2 丁。
27) 日本学士院所蔵『不休建部先生綴術』2 丁。
28) 平山諦『関孝和』恒星社厚生閣，1959 年。
29) 前掲『明治前日本数学史』第 3 巻，271 頁。原本は東北大学所蔵『関算四伝書』(全 8巻)。
30) 同，312 頁。
31) 平山諦・松岡元久編『会田算左衛門安明』笹気出版，1982 年，影印編 6 頁。
32) 日本学士院所蔵『算法千里独行』(稿本) 上，1 丁。前掲『明治前日本数学史』第 4 巻，592 頁。
33) 同前。

(平成 7 年 12 月 15 日受理)

講　座

江戸時代後期の籌算について

田中　　充

0．はじめに

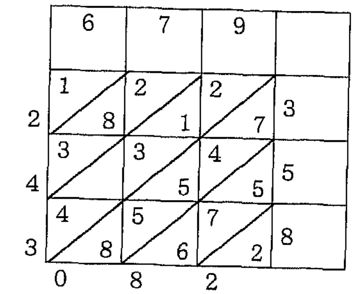
平成7年12月16日の「数学史講座」の「江戸時代後期の籌算について――殊に千野乾弘の場合」と題した話を簡略にしてまとめたものである。

筆者は，この時期に，主として和算プロパーでない人々の間に，集中的といってもよいように現れたこの「籌算」に興味をおぼえ，かつ，幸いそのうちの一書を入手して読んでみたので，そのことを御報告するつもりであったのだが，会場で，「籌算」のその後の発展や，千野以外のことに関する御発言もあり有益であった。また，席上，副会長の野口泰助先生が，著書論文の抜き刷りや，御架蔵の資料を貸与下されたので，それらも含めて書き進めてみる。

1．籌算について

講座のときのテキストには，冒頭に「近世日本数学史概観」として略年表をかかげ，また，ある書物にNapier's boneの例としてあった図を載せたが，それは略して，そのとき明治前日本数学史の第5巻第13章西洋数学の移入第四節籌算（p. 431～）から引用したところをつぎに掲げる。

> 西洋で Napier's bone と唱え，カードまたは板を使用して加減乗除を行ふ算法は，インド，アラビヤより伝へられたものといはれてゐるが，明の時代に中国に渡来した耶蘇会師羅雅谷（Rho GIACOMO）が西洋新法暦書中に籌算〔西洋新法暦書（崇禎16年，西紀1643）所収〕1編を書いて，再び東洋に籌算の流布する端緒を開いた。これに拠って梅文鼎は籌算7巻（康熙戊午（17年），〔中略〕，すなはち我が延宝6年，西紀1678）を著はした。〔中略〕
>
> 籌算の原理は明の時代中国の多くの算書にある寫算（舗地錦ともいふ）と同一であって，例へば………
>
> 358×679＝243082



これが寫算の要領である。これ算法統宗第十二に見え，また大成算経にもこれを載せてゐる。これは中国で創められたものか，あるひは西域から来たものか判然しない。これを１，２，３，４，………，９の倍数の札を使って，器械的に行ふのが籌算である。

続いて我が国に拡まった様子を聞く。（同p. 432～433）

> 我邦でこれが普及を計ったのは，純粋の数学者よりも医家，兵学者，国学者に多かったことは注目される。さうして多くは珠算より籌算をえらぶ理由の一として，十露盤は商賣の具にして士人の手にするをいさぎよしとせぬことをあげてゐる。
>
> 我邦における籌算に関する著書をつぎにあげる。
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 千野乾弘著 | 籌算指南 | 明和４年(西紀 1767)刊 |
> | 千野乾弘著 | 〔籌算〕開平立方法 | 明和５年(西紀 1768)刊 |
> | 千野乾弘著 | 捷徑算法 | 明和７年(西紀 1770)刊 |
> | 有沢致貞著 | 算法指要 | 享保 10 年(西紀 1725)刊 |
> | 山縣昌貞著 | 牙籌譜 | 宝暦 14 年(明和元年, 西紀 1764) |
> | 鶴峯戊申著 | 歸乗捷法 | 文政９年(西紀 1826)(籌式便覧。安政２年(西紀 1855)刊) |
> | 奥村贈貤著 | 算学必究 | 天保 12 年(西紀 1841) |
> | 中川淳菴著 | 籌算 | |
> | 著者不祥 | 紅毛算法(算籌全書) | |

〔追記〕

1) 元和3年（1617）の『下学集』巻之下数量門第十六の一節に「算（サン・カズ）〔以下が算の説明。（　）内はふりがな〕小木ニシテ而四方（ヨハウ）也（ナリ）上下九刀（コヽノカタナ）ニ之ヲ削（ケズ）ル九々八十一（ノ）極数（ゴクスウ）ヲ表（ヘウスル）者（モノ）也」とあり，同様な文面が，慶長２年（1597）版易林本『節用集』左（サ）の部数量にも見られ，解しようでは「籌」の解説とも考えられる。つまりこの当時か

ら「籌」が日本にあったとも考えられる，と野口氏は指摘される。

野口泰助：『シッカード計算機付きソロバン』珠算史研究別冊ピント（昭和 61 年 5 月 10 日）p. 33。

2)　山県昌貞（大貮）の牙籌譜の牙は象牙の意味で，ここで彼は籌に改良を加えている。（席上，山梨県郷土数学研究会長中山政三氏の発言。）

また，彼はたまたま所持していた牙籌を間暇の時に見て乗除の計算法を工夫した由である。（後日の氏の来信による。）

3)　鶴峯成申も籌を見ただけでその使用法を会得し書物を著したと，『明治前』には見えている。（p. 433）

2.　千野乾弘について

やはり，明治前第 5 巻（p. 433～）から千野乾弘の大略を眺める。

千野乾弘（センノカタヒロ）は讃岐高松の医家で，字は玄長，篛渓と号し，また雲巣主人といふ。乾弘の著書はその出所を書いてないが，籌算指南の序文中に「籌算筆算矩算（すなはち度算也。または尺算といふ）」とある点や，暦算全書中にある句が援引してある点から見てやはり暦算全書から得来ったものなることが知れる（p. 433）。

（中略）

千野乾弘の姓はセンノと読むことは，捷徑算法の序文に振仮名してあることより知れる。同書の序文（高野山沙門鳳存序）中に，乾弘が医家として勝れてゐた一挿話があげてある（p. 434）。

つぎに，彼の三冊の著書を眺めよう。

a）　籌算指南

籌算指南は初学者の為に，できるだけ分かりやすくかいてあるので，乗除だけに止め，実際問題について説明してゐる（p. 435）。

乗除には第一から第九までと，空位とあわせて 10 種のカードと，大きい数の計算には右盤，左盤を併せて用いる（それぞれは図 1，2 参照，後述のように，書物で呼び名は違う）。そのカードをここでは籌式とよんでいる。

籌式には直接計算に関与する明数と，行の番号を表す暗数とが書かれてある。暗数は中国の暗碼式の文字が使われている。明数・暗数の名は暦算全書にある。そこでは暗数は行の番号で知られるから，として書いてない，だから暗数というとのことである。

実際問題説明の例として「たばこさん」を挙げる。

これは，第六，第二，第五の 3 つの籌を並べて，当時の煙草をはじめ 160 匁が 1 斤である商品の換算をしてみせているのである（図 3 参照）。

つぎに，3 つの籌での乗・除を例示する。数値例も籌も筆者製である。ここでは暗数を

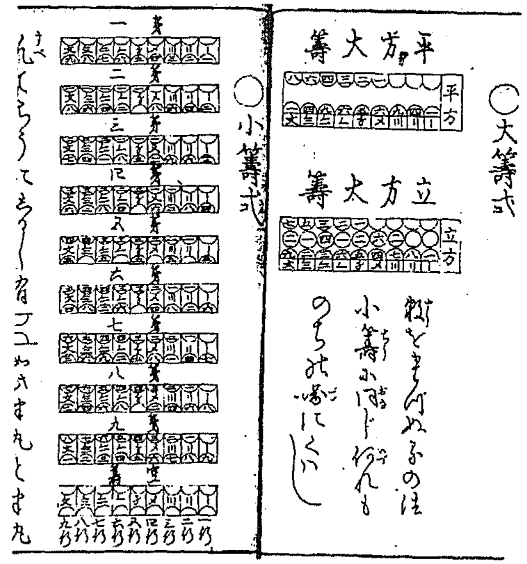


図 1

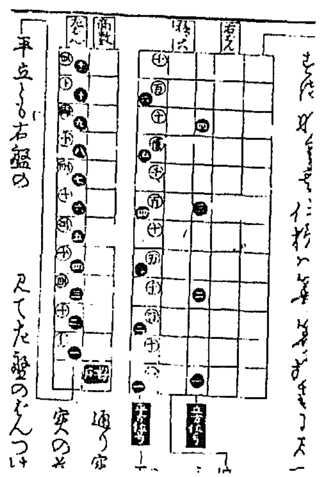


図 2

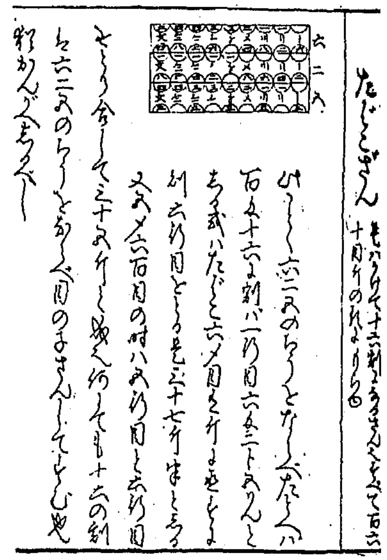


図 3

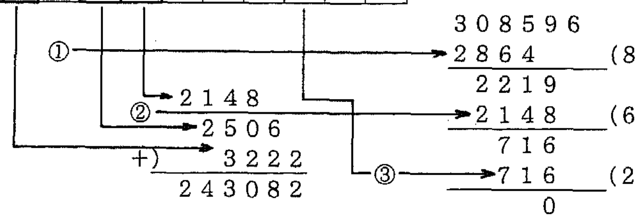
アラビヤ数字で示した。もとの籌のような半円弧を使わず分かりにくいと思うが御了承を乞いたい。

358×679＝243082　　　　308596÷358＝862

二	二	二	一	一	一				第三
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
七	四	一	八	五	二	九	六	三	

四	四	三	三	二	二	一	一		第五
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
五	○	五	○	五	○	五	○	五	

七	六	五	四	四	三	二	一		第八
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
二	四	六	八	○	二	四	六	八	



b）　**籌算開平立方法**

籌算指南で用いた籌式を，ここでは小籌といい，その外に，横はそれらと同じ規格で，縦は記載事項のためにいくらか大きい平方，立方という２枚の大籌と，それに右盤，左盤を用いる。右盤は平方根のためと立方根のためにそれぞれ別の“しるし”がついている。

八	六	四	三	二	一				平方
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
一	四	九	六	五	六	九	四	一	

七	五	三	二	一					立方
二	一	四	一	二	六	二			
九	二	三	六	五	四	七	八	一	
9	8	7	6	5	4	3	2	1	

〔その〕方法は暦算全書にあるものと同一である。故に千野乾弘はそこから得来ったことは確かである（p. 436)。

〔追記〕

4)　これまでも，この後も『明治前』には，内容から『暦算全書』に拠ったであろう，という論証をしているが，筆者所持の『籌算指南』には「奥付」のところに

清　宜城　梅 文 鼎 著
籌 算 原 本　　　　　　　　　　　嗣出
日本　東讃　千 野 乾 弘 校

とあるので，千野が梅文鼎の『籌算』を見たことは察せられる。藤原の見たものは合冊などの理由で，ここが飛んでいたのであろうか。

c）　**捷徑算法**

捷徑算法は明和己丑（６年西紀1769）東讃千野乾弘跋，明和７庚寅歳５刊となってゐる。その巻尾に珠算開方，句股算法嗣出とあるが，はたして上木されたか不明である（p. 436)。

捷徑算法は籌の形を改良したもので，紙製の籌が添へてある。この算法を世人千野算と称すといってゐる。巻末に雲巣の角印をおし，その下に「毎部有圜章為真」とある。跋文中に

嘗聞之邵子曰算法雖多乗除盡之矣

とあるが，暦算全書の除法の条にも

邵子曰算法雖多乗除盡之矣

とあるから，千野が梅文鼎に拠ったことがいよいよ明らかになる（p.437)。

〔追記〕

5)　ここでの籌の改良が本質的か否か，筆者は疑問である。また，紙製の籌が添えてあるのは，この『捷徑算法』だけではなさそうである（席上野口氏は『籌算指南』のそれらを披露された)。

十露盤を用ゐるのを長所としてゐたのであるが，本書では，掛算の時の相乗数や，割算の時の実は十露盤におくとしてゐる。すなはち今まで籌を用ゐながら，筆算を併せて用ゐる不便があったのを，その代りに十露盤を入れて，寄算引算を行ふことに改めたのである。

開平開立は記してない（p. 437)。

以下，『籌算開平立方法』の開平，開立を眺める。原文を口語に抄訳したものを主として述べる。

3. 開平方法

▲假令ば　面積　壱十弐万九千六百　が有る。

平方にこれを開くとき，何間四方と成るか。三百六十間ずつに成る（第五丁)。

これすなわち平面であって，碁盤のように四方に等しい。

→このように実をかきながら，この実の内で平方の号　三　が首となっている。だから左盤の　三　を右盤の　三　より一位あげて図のように置くのである。

減法（わりやう)。初商〔を求め，その2乗を実から引くには〕首の号かぎりに引くのである。ここでは，実の〔最高位の〕次にもあるから両位の（その2けたの）12万の数を引くのである。(中略)

八	六	四	三	二	一				平方
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
一	四	九	六	五	六	九	四	一	

							一	二	九	六	○	○	
兆	千	百	十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	
七		六		五		四		三		二		一	平方号

									3			法
千	百	十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	首
		十	九	八	七	六	五	四	三	二	一	位

平方籌を見ると，一二という数はない。よって一二に（小さくて）近い数を取る。それは3行目の九である。そこで3行目の　3　を，万の位より一位上げて（原文は縦書きです。）左へ記入する。(平方籌の3行目の上は）空位であるので一位上げるのである。そして〔実の十二万から〕九万を引いて三万九千六百余る。それは次の図のようになる。

次に初商の三百を2倍して六百とし（よって)，第六籌を平方籌の上に連ねて（このかたちを）廉法という。次の図のようである。

→次商は首から二番の号までを引く〔廉法を用いた考察の対象になる〕。すなわち百の位の　三　である。この実（ここでの実）は三万九千六百である。これを（廉法として立てた）籌の中に探すと，6行目がそれと同じである。だから　6行目の　6　を左へ三万にたいして記入する。

さて，これから，(ここでの実の）三万九千六百を廉法の三万九千六百で引くと皆引き払うことが出来て〔求める数は〕三百六十となることが分かる。

五	四	四	三	三	二	一	一		第六
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
四	八	二	六	○	四	八	二	六	

八	六	四	三	二	一				平方
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
一	四	九	六	五	六	九	四	一	

							一	二	九	六	○	○	
								三	九	六			
兆	千	百	十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	
七		六		五		四		三		二		一	平方号

									3	6		法
千	百	十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	首
		十	九	八	七	六	五	四	三	二	一	位

文字を用いて要約してみる。

実$=(a+b+c)^2$　として未知の a，b，c を求めるのに

$$\text{実}-\{\underbrace{a^2}_{①}+\overbrace{\underbrace{2}_{②}ab+b^2}^{③}+\overbrace{\underbrace{2(a+b)}_{④}c+c^2}^{⑤}\}$$

となるのたが，

i）　被開平数を右盤に記入し，その区切れ具合によって平方籌から a を探す。…①

ii）　$2a$ から次に用いる小籌を知って平方籌の上に並べる。……………………②

iii）　その配列から次の　$2ab+b^2$　を求める。………………………………③

以下はii)，iii）の繰り返しである。すなわち

iv）　$2(a+b)$　から次に用いる小籌を知って平方籌の上に並べる。……………④

v）　その配列から次の　$2(a+b)+c^2$　を求める。…………………………⑤

と進む。

筆算で行うときには上のii)，iii）の所で　(実$-a^2$)$/2a$　として　b　の見当をつけるのだが，普通の割り算とは異なるからやゝ困難を感じる。

籌算に依るときは確かにその困難は感じずに済むのである。

4. 開立方法

▲假如　(体)積　一千三百三十一尺　が有る。

立方にこれを開けば，一十一尺が得られる。

四方上下として形は骰子〔さい〕のようで六面ある（第十一丁）。
左盤のばんつけの置きようは平方と違い，これは二位づゝあける。以下同様である。
○引き様は平方のように，初商は首になる号切りに引き，次商は二番切りの数を引く。三商以上も皆同じである。（だからここでは先ず首位の）一千だけを籌を用いて探す。すなわち，この号切りの数で探すのである。

七	五	三	二	一					立
二	一	四	一	二	六	二			
九	二	三	六	五	四	七	八	一	法
9	8	7	6	5	4	3	2	1	

									1				
									一	三	三	一	
兆	千	百	十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	
五			四			三			二			一	平方号

								1		法
十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	首
十	九	八	七	六	五	四	三	三	一	位

○扨て立方籌を見ると，1行目にこの数　一　がある。だから　一　を　実　より二位あ

二	二	二	一	一	一				第
9	8	7	6	5	4	3	2	1	三
七	四	一	八	五	二	九	六	三	

七	五	三	二	一					平
二	一	四	一	二	六	二			
九	二	三	六	五	四	七	八	一	方
9	8	7	6	5	4	3	2	1	

											三	〇	
										(三	〇	一)	
										三	三	一	
兆	千	百	十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	
五			四			三			二			一	平方号

								1	1	法
十	億	千	百	十	万	千	百	十	一	首
十	九	八	七	六	五	四	三	二	一	位

けて記入する。（今問題の立方）籌に，上に空位が2つあるからである。さて，実から1000を引いて331となる。これが右盤に残って前頁の図のようになる。

今度は右盤に　331　がある。

しかし，ここで後の必要のために廉法　30　を求めておく。これは今得られた初商に　3　を掛けて得られる。（このあと得られる）次商の二乗に掛けて用いるのである。さて，今得られた初商の　10　の二乗に　3　を掛けて　三百　となるので，立方籌の上に第三籌を置いて，これを方法という。

左盤の法首位を右盤の百に対するように置く。今右盤にある　三三一　を方法から探すと，1行目の　三〇一　が近い。それで　1　を，右盤の実の　三百　よりも一位あけて記入する。それは，今着目している　籌　の上に空位があるからである。

ここで　実　の　三三一　から，今得られた　三〇一　を引いて　三〇　となる。

今得られた商——次商を2乗して，さきの　廉法　を掛けると　三〇　であるが，この　三〇　を，残った　実　の　三〇　から引いて，ちょうど引き切れる。したがって（開立整）商は　一十一尺　である。

開平の時と同様文字を用いて要約してみる。

実$=(a+b+c)^3$　として未知の a, b, c を求める。

$$実-\{\underbrace{a^3}_{①}+\overbrace{\underbrace{3a^2}_{②}b+b^3}^{④}+\overbrace{\underbrace{3a}_{③}b^2}^{⑤}$$

$$+\overbrace{\underbrace{3(a+b)^2}_{⑥}c+c^3}^{⑧}+\overbrace{\underbrace{3(a+b)}_{⑦}c^2}^{⑨}\}$$

i）　被開立数を右盤に記入し，その区切れ具合によって立方籌から a を探す。…①

ii）　$3a^2$ からつぎに用いる小籌を知って立方籌の上に並べる。…………………②

iii）　$3a$ を廉法として記録しておく。……………………………………………③

iv）　ii）の配列からつぎの　$3a^2b+b^3$　を求める。…………………………④

v）　iv）で　b　が分かったので，それと　iii）の　$3a$　から　$3ab^2$　をつくる。……………………………………………………………………⑤

以下は　ii）　iii）　iv）　v）　の繰り返しである。すなわち

vi）　$3(a+b)^2$　からつぎに用いる小籌を知って立方籌の上に並べる。………⑥

vii）　$3(a+b)$　を次廉法として記録しておく。…………………………………⑦

viii）　vi）の配列からつぎの　$3(a+b)^2c+c^3$　を求める。…………………⑧

ⅸ） ⅷ） で c が分かったので，それと ⅶ） の $3(a+b)$から

$3(a+b)c^2$ をつくる。………………………………………………………………⑨

開平に比べて ⅲ） と ⅴ），または同じことだが ⅶ） と ⅸ） とが付け加わって複雑になる。

5. 命分之法

分とは分数の分母と分子，“命ずる”は“指定する”の意味のようである。正の整数に開法を施して開き切れなかったとき，そのときの整商と剰余とから小数点以下の端数を表す分数を求める方法である。

第九丁に開平の場合の“命分の法”がある。開平の計算を実行して開き切れないときに，小数点以下の端数を分数にする方法である。つぎのように述べている。句読点と送りがなを適宜補って掲げる。

> その命分の法は，先ずわり出したるすうを倍して，それに又　一　を加へ，扨，わり残りの不尽を其のまゝに置く。たとへば，此の段のごとく商数　八十九　有り，これを倍にすれば　百七十八　と成る。是れに又　一　を加へて　百七十九　と成し，是れを　親　とするなり。扨，わり残りの不尽を　子　とすれば　一百七十九分　之　一百七十八　となる也　いづれもみな，此の心得にてすむなり。

すなわち，

$$\sqrt{8099}=89+\frac{178}{2\times89+1}=89+\frac{178}{179}$$

一般化して，Aの平方根を求めるとし，aを開平整商，xを開平剰余として表すと

$$\sqrt{A}=a+\frac{x}{2a+1}$$

である。

すなわち，

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2+x}\fallingdotseq a+\frac{x}{2a}$$

と近い。近い形ではあるが同じではない。なぜ分母に　1　を加えたのであろうか。

8099 に 1 をくわえると 8100 で，その平方根は 90 である。

それを敢えて

$$8100=89^2+179$$

としてみる。即ち

$$\sqrt{8100}=\sqrt{89^2+179}\fallingdotseq 89+\frac{179}{178}$$

ここで，もし，分母を　178＋1＝179　とすれば

$$\sqrt{8100}=89+1=90$$

という正確な結果が得られる。

したがって，このようにして分母の　＋1　を考え付いたのか，と思ってみた。

開立の場合の“命分の法”は，終わり近く，第十八丁に独立して出ている。前のように句読点，送りがなを補って掲げる。（　）内は振り仮名，〔　〕内は割り書きのところである。

> ○立方の命分ハ，先ず商数を自乗（かけあハし），これに又　三　をかける。〔たとへバ商数　九　となれば，九ゝ　ノ　八十一　となし，是に次にまた　三　をかけて　二百四十三　となる。別に置く。〕
>
> 次にまた商数をかけ合はさず，只（たゞ）　三　ばかりをかける。〔たとへば，商数九なれば，只　三　をかけて　三九　二十七　とす〕
>
> 右の弐品合して弐百七十となる。是に又　一　を加へて　弐百七十一　となし，扨，引きのこりの数　八十一　あれば　弐百七十一　分の　八十一　となる也，いづれも此の心得にてすむなり。

末尾の文は開平の場合とよく似ている。

そこで，開平の場合に倣って完全立方数を用いて考えてみた。

27000は立方に開ききれるのであるが

$$30^3=27000=293+2611$$

であるから，27000の開立整商は　29，開立剰余は　2611　と見なしてみるのである。そして千野の式を適用してみると

$$30=\sqrt[3]{27000}=29+\frac{2611}{3\times292+3\times29+1}$$
$$=29+\frac{2611}{2611}$$

となるのである。開平の場合と同様である。つまり，完全平方数や完全立方数のときには“密合する”のである。

昔，細井淙先生の講義で，初期の弧矢弦の公式は半円のときに密合する，と言われたのを思い出した。ここまで来てやっと気がついた。

要するに，２項式の３乗の展開式の変形だったのである。文字を用いれば

$$A+1=A+\frac{(A+1)^3-A^3}{3A^2+3A+1}$$

だったのである。開平の場合は

$$A+1=A+\frac{(A+1)^2-A^2}{2A+1}$$

である。

改めて，A；開平整商，R；開平剰余，ε；小数点以下の端数，として考えて見る。

実$=A^2+R=(A+\varepsilon)^2$　で，A，Rから　ε　を求めたい。

図４で

$$\frac{\varepsilon}{1}\fallingdotseq\frac{(A+\varepsilon)^2-A^2}{(A+1)^2-A^2}$$

$$=\frac{実-A^2}{(A+1)^2-A^2}$$

$$=\frac{R}{2A+1}$$

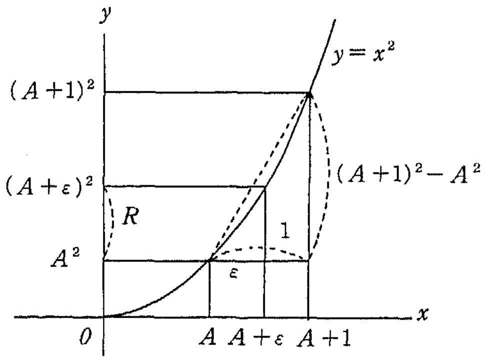


図４

つまり，グラフの曲線のかわりに割線を用いた一次補間であった。

なお，テキストには，山崎，戸谷，鈴木：『珠算算法の歴史』（森北出版）から，命分之法の古い中国の例を挙げたが，ここでは省略する。

5.　まとめ

以上，千野乾弘の場合，それも開平立を中心として述べてきた。それは，開平立や，さらに帯縦開平立などが，わが国の江戸時代までの“方程式論”とも見られると考えたためであったからである。前に常陸の地方版と思われる『和歌算』を読んだとき，二次方程式の解が他と比べて長く，それを考えあぐねたことがあったからでもある。

ここで，1.　に掲げた「籌算」の書物の内，刊本で最古でもある『籌算指南』の「珠算」に対する優位宣言（？）を見よう。

まず，覚えやすく，「わりごえ」は不要である，という。

一　珠算には帰（はっさん）。帰除（けんいち）のわかち有　其割やう皆歌訣〔原は異〕（わりこへ）ありて一々学ばざればわかることかたし見一になりては割こへや九々やたがひに見合しよび合して是を学ぶ　たとひ覚るといへどもたちまちわすれやすし　唯此籌算（ちうざん）は　割こへをとのふることなく　目と意をもって朝習へば　くれには　はや　能　其理をしりて　いかやうな　むつかしきことも　われずといふ事なし

つぎに，「位」を定めるのに優れている，という。

一　十露ばんにては　位を定る事　別に　其習なくては定かたし　たとへば壱貫目を二百に割は　一の数を　貫の位にをき　二一添作の五　ととなへて其一を　其儘五につくる　さて其位を見れば五貫目なり　ぐどんの者は　其五を五百目かと思ひ　又は　五十匁かとうたがふ　やうやうしあんして　五匁と知る也　かけさんも　大数に到るほど其位に迷ふ事　右に同じ　此ちうざんは　一貫目を二百に割ば　ぢきに五匁とあらはるる　なお　かけわりともに　くらいの　しれやすき事　此算の妙也

そして，「そろばん」は不要である，という。ただし前述のように千野は『捷徑算法』で「そろばん」との併用を説いている。

一　算ばんと数とりを制して　初学に便りす　数取は此算木を五つの数に用ゆ　外の小数は一ツづつと心得べし　若数取なきときは　五にたつる物を筆のさやか　わらしべのるい　外の小数は　小石・豆子（まめつぶ）の類　其席に有合ふ物にて　五つにたつる物と小数と　紛れざる物を用るのみ也　それ算は併（あはす）と減（へす）とのふたつ　則是数とりにて　目の子ざんする也　能鍛練（よくたんれん）すれば　盤も数とりもいらず　籌ばかりを用ひて　算するごとに　紙ぎれに　商と実とのくらゐを　筆書してすむ事也

結局，「そろばん」で乗除の際に「位」を定めるのに迷うよりは「籌算」を併用せよ。また，会得しやすいから，「文人君子」もこれを用いて「筆算」をせよ，とまとめている。

一　そ露ばんは　古来より士農工商　皆日用に便りす　然れども多数の掛割に及んでは其位を定るにまよふ事多く　たとへ十露ばんを覚るとも　此籌ざんをかね用るときは　位を定るに労（ろう）なし　且そろばんは常に是をじゅくす　此ちうざんは　今新に算するにより　紛はしきやうなれど　能考ふ時は　其やすき事そろばんの一毛□其上位を得るの理　爲に盲者の初て日月を看（み）るがごとし　或は文人君子は割こへを唱ふる事をはぢ　且　覚へがたきをもって廃（はい）して講せず　希（こいねがはく）は此ちうざんを術して筆書を用ひよ　簡易直截（か

んいちょくせつ）又数学の一楽也

千野の「籌算」とほとんど同様のものが明治24年4月に，鷲澤吉次という人によって『〔新奇新式〕速算法講義　完』（〔　〕内は割り書き）として刊行されている。乗除のみを扱っている。各「籌」が千野や梅文鼎のものとは逆に，右ほど大きいように出来ているのは面白い。

また，1．に載せた図のような方式のものには，有名な福田理軒の『西算速知』上，下2巻がある。やはり乗除のみを扱う。

さらに，このような方式のロッドを7本と，その右に15けたの5玉そろばんを付け，位取りの移動金具を付けた「国華算盤」（特許）がある。堺市，河又醤油の河盛又治郎氏の考案である。

以上の3件，何れも野口氏の御教示による。1．の〔追記〕の野口氏の論文は，表題のように，この河盛氏の発明の紹介を主目的とされたものである。

6．おわりに

会場で申したように，千野の「位取り」については，まだ筆者の勉強が不十分である。

一般に「定位法（じょういほう）」についても宿題とする。

また，中山政三氏は早速『牙籌譜』のコピーをお送りくださった。これまた併せて宿題とさせていただきたい。

さらに，明治に入って，数の開平立の計算についての基本的な考察が，高木貞治の『新撰算術』，寺尾壽の『算術教科書』にあるが，これらも機を得て調べてみたい。

（平成8年1月10日受理）

資　料

吉田宗恂校，吉田如見考「三尺求図数求路程求山高遠法」について

下浦　康邦

1．「三尺求図数求路程求山高遠法」の概要

写本「三尺求図数求路程求山高遠法」は天理大学付属天理図書館蔵本である。

天理図書館の蔵書目録によれば，考案者吉田如見の自筆本とされる。

もともとは，袋綴じ48頁（内，墨付46枚）の本であったものを上下2段に改装臺貼し，13折の一帳本に仕立て直してある。

現在の写本の大きさは，縦31糎，横20.5糎。

2．「三尺求図数求路程求山高遠法」の構成について

この写本は以下の6篇から成り，最初の3篇には考案者および校閲者の名が入っている。

1)	三尺求図数	標題下に「法眼　意菴　邨・恂校」
	三尺求路程覚	項目終に「一考了　恕軒　吉皓（花押）」
2)	五尺求図覚	標題下に「意菴　邨・恂・又玄校」
	求路程之覚	項目終に「一考了　清江亭　如見（花押）」
3)	堅六尺五寸横六尺図	標題下に「大医局法眼　邨・恂校」
	以図求路程覚	項目終に「一考（了）帰陽窩　皓　（花押）」
4)	求路程法	
5)	求高法	
6)	求山高遠法	

上記のうち「法眼」「意菴」「邨」「恂」「又玄」「大医局法眼」は，すべて吉田宗恂を差し，一方「恕軒」「吉皓」「清江亭」「帰陽窩」「皓」は吉田如見の号であると考えられる。

また，写本の題簽には，天理図書館の蔵書目録によれば，呉秀三博士の自筆で

「吉田宗恂校
吉田如見考　三尺求図数求路程求山高遠法」

とある。

また，最初の頁に「吉田称意館」の朱印，また最後の頁に「称意館之宝」の朱意印がある。ちなみに「吉田称意館」と「称意館之宝」は吉田一族の当主である歴代吉田意安の蔵

書印である。「吉田称意館」は同時に吉田意安の蔵書そのものを指す。

筆者はこれまで日本の図書館に現存するほとんどすべての「吉田称意館」と「称意館之宝」の蔵書印のある吉田一族の関係文書を見てきたが，写本の形式，紙の質，朱印，そして内容のどれをとってもそれらとまったく同質である。

本写本は，もともと歴代吉田意安の蔵書であったが，いつしか流失して，おそらく明治中頃に呉秀三博士（1865 年（慶応元年）～1932（昭和 7 年））の所有となったものと考えられる。

そもそも呉秀三博士の医学・本草関係の大蒐集は富士川遊博士のそれと双璧といわれたが，富士川游博士の文庫が京大と慶応大にほとんど残っているのに対し，呉秀三博士の蔵書は子息の呉茂一博士の代になってすべて売却された。一部は早稲田大学や天理図書館に残存しているが，海外に渡ったものも多いといわれている。呉茂一博士が手放された時期は昭和 20 年代初頭と推定されるが，おそらくその当時に天理図書館はこの写本を購入したものであろう。図書館受入は昭和 31 年となっている。

以上より，本書は，呉秀三博士が題簽に書かれたとおり吉田如見が考案し，吉田宗恂が校閲したものであることは確実である。

3．校閲者の吉田宗恂と考案者の吉田如見について

吉田宗恂（1558～1610）は，いわゆる京都嵯峨の吉田家の一員であり，吉田光由の遠縁にあたるが，これまでの調査してきた結果からすると，日本最初期の数学者であると考えられる。また，考案者の吉田如見は，校閲者の宗恂の長男で宗恂の本業である医者を継いだ人物である。

4．吉田宗恂の数学研究について

吉田宗恂の数学研究の様子については，林羅山（道春）（1583 年～1657 年）の「羅山林先生文集」の中に以下のような貴重な証言がある。

「世医の意庵宗恂，先生（藤原惺窩）に見ゆ。先生，その術を問ひ，相ひ共に語り，しばしば暦・数・運気・病論・方剤の事に及ぶ。恂の技術の進むことあるは，これを以てなり。先生，戯れに人に語りて曰く『我，彼に問ふにあらず。彼，来りて我に問ふのみ』と」

（岩波書店「日本思想体系 28」 P191 を参考に一部表現をあらためて引用した）

さらに，林羅山の証言より一層正確で詳しい記述が，姜沆（1567 年～1618 年）の「看羊録」（1656 年刊）に存在している。

「倭僧意安（宗恂）なる者に会うことがありました。倭京の人です。その祖，その父（宗

桂の代）から中国で学び，意安（宗恂の代）に至ってやや算学・天文・地理を理解するようになり，かつて土圭を作って日影を測り，ほぼ天地の円方，山川の遠近を知った，ということです」（東洋文庫 440，平凡社 P30）

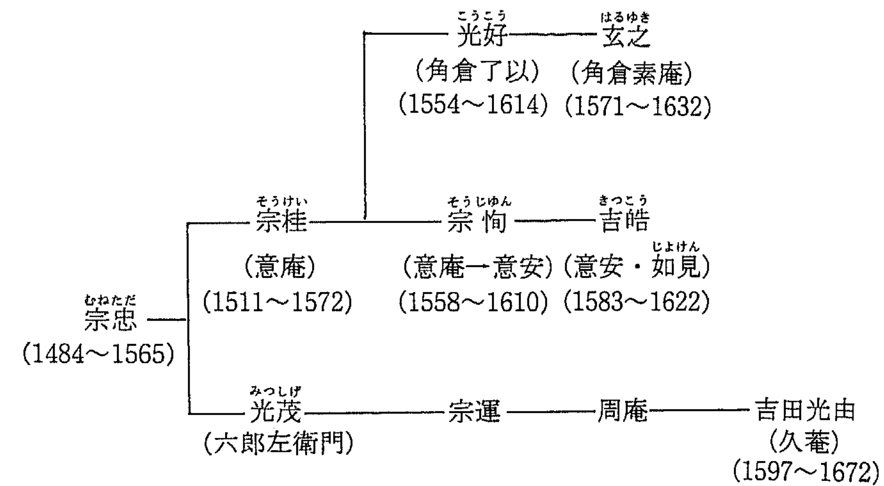
「医僧の意安（宗恂）が日影台と銅の渾（天）儀を作り，天地四方の遠近を測った……」（同書，平凡社 P218）

5．「三尺求図数求路程求山高山法」の成立年代について

校閲者の吉田宗恂の成没年は 1558 年～1610 年であり，考案者の吉田如見の成没年は 1583 年～1622 年である。校閲者の生きている間に成立したと考えるのが順当であるから，本写本の成立年代は 1610 年以前となる。

以上より本書は，新発見の，しかも現存するうちで日本で最も古い数学関係の写本ということになろう。

・京都嵯峨，吉田・角倉家の系譜



6．「三尺求図数求路程求山高遠法」の内容について

本写本は 2 で掲げたとおり，以下の 6 篇の項目から成っている。

これを順に解説してみよう。

1）「三尺求図数」

（上　段）	（下　段）
十六町　六百二十四丈也	一厘四毛四絲二忽
十五町　五百八十五丈也	一厘五毛三絲八忽

十四町　五百四十六丈也　　　　一厘六毛四絲八忽

…………(以下，15 行省略)…………

三十間　十九丈五尺也　　　　四分六厘一毛五絲

「三尺求路程覚」

（上　　段）　　　　（下　　段）

五厘　　　　百八十丈　四町三十二間二尺

一分　　　　九十丈　　二町十八間三尺

一分半　　　六十丈　　一町三十二間二尺

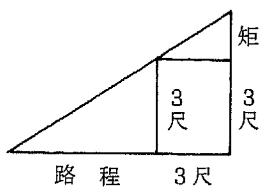
…………(以下，87 行省略)…………

三尺　　　　三尺也

まず最初の２項目においては，以上の如く上下２段書で数値がならんでいる。

これらはすべて９を上段の値で割った数値を，下段に記している。

4) 「求路程法」に付された著者の解説から，この２項目の数値は以下の公式の計算結果を意味していると推測できる。



上記が直角三角形の場合，以下の式が成り立つからこれを変形する。

$$\frac{3\text{尺}}{\text{路程}} = \frac{\text{矩}}{3\text{尺}}$$

∴路程×矩＝９尺・尺

したがって，「三尺求図数」の上段の数字は路程，下段数字は矩（図数）であり，本項目は，路程が判明しているときの矩（図数）の数値を計算したものと考えられる。

一方，「三尺求路程覚」の上段の数字は矩（図数），下段数字は路程であり，本項目は，矩（図数）が判明しているときの路程の数値を計算したものと考えられる。

2) 「五尺求図覚」

（上　　段）　　　　（下　　段）

十六町　六百二十四丈也　　　　四厘　　　六忽

十五町　五百八十五丈也　　　　四厘二毛七絲三忽

十四町　五百四十六丈也　　　　四厘五毛七絲八忽

…………(以下，12 行省略)…………

一町　　三十九丈也　　　　六分四厘一毛二忽

「求路程之覚」

（上　　段）　　　　（下　　段）

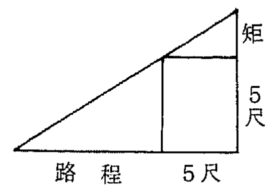
一分　　　　二百五十丈也　六町四間四尺也

一分半　　　百六十六丈六尺六寸六分　四町十六間二尺六寸六分也

二分　　　　百二十五丈　三町十二間二尺也

…………(以下，113 行省略)…………

五尺　　　　五尺也



上記と同じ様にすると，

∴路程×矩＝５尺×５尺＝25尺・尺

この項目は，正方形の部分が５尺の場合を考慮しており，「五尺求図覚」の上段の数字は路程，下段数字は矩（図数）であり，本項目は，路程が判明しているときの矩（図数）の数値を計算したものと考えられる。

一方，「求路程之覚」の上段の数字は矩（図数），下段数字は路程であり，本項目は，矩（図数）が判明しているときの路程の数値を計算したものであろう。

3) 「竪六尺五寸横六尺図」

（上　　段）　　　　（下　　段）

十六町　六百二十四丈也　　　　六厘二毛五絲

十五町　五百八十五丈也　　　　六厘六毛六絲六忽

十四町　五百四十六丈也　　　　七厘一毛四絲二忽

…………(以下，12 行省略)…………

一町　三十九丈也　　　　一寸

「以図求路程覚」

（上　　段）　　　　（下　　段）

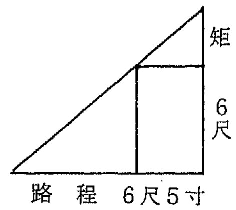
一分　　　　六百間　十町也

一分半　　　四百間六町六段六間也

二分　　　　三百間　五町也

…………(以下，125 行省略)…………

三尺　　　　二間也



上記と同じ様にすると，

∴路程×矩＝６尺５寸×６尺＝39尺・尺

この項目は，長方形の部分が竪六尺五寸，横六尺の場合を考慮しており，「竪六尺五寸横六尺図」の上段の数字は路程，下段数字は矩（図数）であり，本項目は，路程が判明しているときの矩（図数）の数値を計算したものと考えられる。

一方，「以図求路程覚」の上段の数字は矩（図数），下段数字は路程であり，本項目は，矩（図数）が判明しているときの路程の数値を計算したものと考えられる。

4)　「求路程法」

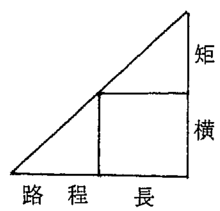
この項目以下はこれまでのような数字の羅列ではなく文章と図から成っている。この中ではじめて，著者は以下の図を示し，上記の６項目の数値を算出する公式を漢文で示している。

「算法曰，相乗図長横為実（以）出矩為法除之得路程」

(∴路程＝長×横÷矩)

「相乗図長横為実以路程為法而除之則得出矩」

(∴矩＝長×横÷路程)



そして長が４尺，横が３尺，矩が２尺の場合に路程を求める問題と解答を付している。

まず上記の公式にあてはめ

路程＝長×横÷矩

＝４尺×３尺÷２尺

＝６尺

つぎに長が４尺，横が３尺，路程が６尺の場合に矩を求める問題と解答を付している。

上記の公式にあてはめ

矩　＝長×横÷路程

＝４尺×３尺÷６尺

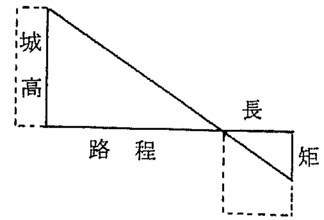
＝２尺

5)　「求高法」

この項目は実測することなしに，城の高さ計測する方法を示している。

「法曰，置路程以入矩乗之為実以図長為法除之得高」

（高＝路程×矩÷長）



そして路程が40尺，矩が１尺，長が４尺の場合に路程を求める問題と解答を付している。

まず上記の公式にあてはめ

高＝路程×矩÷長

＝40 尺×１尺÷４尺

＝10 尺

6)　「求山高遠法」

この項目は，測量地点を異なる２点から行うことによって山の高さと遠さ（路程）を計測する方法を示している。

「算法曰，表二丈三尺之内減短表三尺而為図横…相去両表五十丈為図長

…相乗長横為実置後表去短表四丈減前表短表二丈而餘二丈為法…

…除実則得高五十丈」

(∴高＝長　　×横　　　　　　　÷（４丈－２丈）

＝50丈×（２丈３尺－３尺）÷（４丈－２丈）

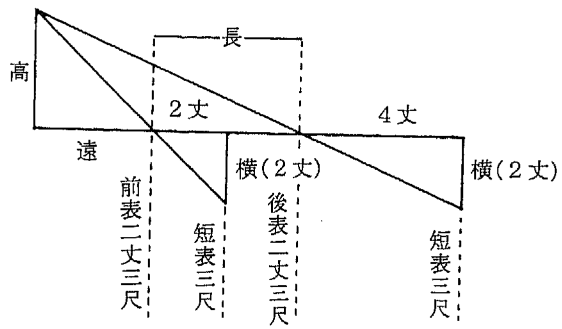
＝50丈)

「又置両表間五十丈以前表去短表二丈乗之為実両退相減餘二丈為法餘之得遠五十丈」

(∴遠＝長　×２丈÷（４丈－２丈）

＝50丈×２丈÷（４丈－２丈）

＝50丈)



① $\dfrac{\text{高}}{\text{遠}} = \dfrac{\text{横}}{2\text{丈}}$

遠×横＝高×２丈　（A）

② $\dfrac{\text{高}}{(\text{遠}+\text{長})} = \dfrac{\text{横}}{4\text{丈}}$

高×４丈＝（遠＋長）×横

＝遠×横＋長×横

Aを代入

＝高×２丈＋長×横

高×（４丈－２丈）＝長×横

∴高＝（長×横）÷（４丈－２丈）　（B）

ここで長は50丈，横は２丈であるから，

高＝（50丈×２丈）÷（４丈－２丈）

＝50丈

またAより

遠×横＝高×２丈

$\text{遠} = \dfrac{\text{高}\times 2\text{丈}}{\text{横}}$

Bを代入

$= \dfrac{(\text{長}\times\text{横})}{(4\text{丈}-2\text{丈})} \times \dfrac{2\text{丈}}{\text{横}}$

∴遠＝（長×２丈）÷（４丈－２丈）

ここで長は50丈であるから，

遠＝２丈×50丈÷（４丈－２丈）

＝50丈

以上で本写本の説明を終わるが，ここにつけた図は，説明しやすいように変形しており

原本のとおりではないことを付け加えて置く。

7.　後世への影響について

本書はいかにも「算法統宗」の測量術からの影響が大きいように見える。

また，吉田光由の「塵劫記」寛永 11年 小型４巻版の「町つもりの事」には，

「右　これはむかひの目付丈尺しれ申候故に　かくのことくにつもるなり
又あるひハ　遠さをしれハ　むかひの目付のひろさながさなともしれ申候　又遠さもしらす　目付の丈尺もしらさるをつもる事ハ　句股の法をもつて皆つもる也　山の高さをつもる法あり　くはしくは　句弦股数の巻にあり（研成社版 P101）」とあり，

さらに，「塵劫記」寛永 20 年版の「町つもりの事」に，

「又たかさ，わきへのとをさ，つもりやう色々口伝有之也（岩波文庫版P199）」とあり，

また，今村知商の「因帰算歌」の「遠積為之図」に，本書に酷似した図を付したあとにも，

「右遠積の図　縦横ニ三四を用るはロ伝あり（研成社版 P102）」

とあるが，これらの口伝の原典こそが，それぞれ本書を差したものである可能性がある。

したがって，吉田光由は，角倉素庵を通じて，吉田宗恂が「算法統宗」を研究して得た結果であると推測される吉田・角倉家の測量術を伝授されたと考えられる。

また毛利重能門下の今村知商の「因帰算歌」に，この秘伝が継承されているということは，「角倉源流系図稿」の「後は重能，還って光由に学ぶ」という記述を証明しているように思われる。

（平成 7 年 12 月 10 日受理）

編集後記

先号と同じお願いを繰り返して恐縮ですが，一覧表や図版などは写植に特別な手間と技術を要します。本誌も限られた資金で運営している関係上，今後，写植費の一部負担をお願いする場合もあるかと存じます。具体的な金額などは，いただいた原稿から推算して事前にお知らせできるよう努めたいと思います。なにとぞご理解のほど，よろしくお願いいたします。

これもまた多くの学会誌の投稿規定に明記されていることですが，著者校正の時点での内容訂正や加筆・削除は極力ご遠慮下さい。変更が大きい場合は別の論文として扱われ，再審査からやり直す必要が出てきます。会誌の定期発行にもひびくため，ご協力のほど，よろしくお願いいたします。

(西田知己)

日本数学史学会　年 会 費　10,000円
郵便振替　00120-6-20022

新規お申し込みの方は，日本数学史学会事務局または研成社へお問い合わせください。

数学史研究

通 巻　149 号(1996 年 4 月 ～ 6 月)

編集・発行　日本数学史学会

発 売　㈱研成社
東京都中央区日本橋蛎殻町1-6-4
電話 03-3669-1828(代)／FAX 03-3669-1850

ISSN 0386-9555

SŪGAKUSHI KENKYŪ

JOURNAL OF HISTORY OF MATHEMATICS, JAPAN

No.149

April-July, 1996

CONTENTS

Edited and Published by
The History of Mathematics Society of Japan

数学史研究　（通巻 149 号） 平成 8 年 6 月 25 日

定価2,500円（本体2,427円）

ISBN4-87639-093-2 C3041 P2500E