ISSN 0386-9555

数学史研究

（通巻157号）

1998年４月～６月

目　　　次

論　　　説

発行・日本数学史学会

発売・研成社

論　説

「無尽」の数理について
──「天元算法利伝記」の無尽の場合──

田中　充

1. はじめに

筆者は平成9年11月の「第4回数学史研究発表会」で

『ながさきむじん物語』について
──その遺題解決にむけて──

と題して発表させて戴いた。その際、林鶴一の先行研究を目にし、筆者なりの要約と引用とで、つぎのように述べておいた。[1)]

田中丘隅の『民間省要』、海保青陵の『稽古談』で無尽のことを説いているが仕組みは分からないし、信濃国上伊那郡の吉瀬源兵衛長盈の文久4年の書『天元算法利伝記』に「利算勘元徳講記」があって、無尽講勘定平均法二十二種を述べているがデータの羅列に過ぎない。だから、これをそのまま真似て（無尽）講を起こすことは出来ようが“他ノ場合ニ適用シ得ベキ算術ハ明示セラレザルヲ遺憾トス。故ニ余ハ今最モ古シト思ハルル中村ノ記述ヲ反訳シ、彼レガ用ヒタルベキ一般公式ヲ誘導セントス。”と目標を定める。（引用終わり）

かくして、林鶴一は『ながさきむじん物語』の前半の内容を公式としてまとめ、数値の訂正もしているのである。

筆者はこの時、出来れば『天元算法利伝記』を目にしたいものと思っていたが、幸いそのことが叶った。取り敢えず（他のところはおいて）林の言う無尽講勘定平均法二十二種だけを見て、自分としては納得が行き、22種は原理が同じ、と分かったので、代表させ易い所の「利算算勘元徳講記」の第9番目を取り上げた次第である。

ここで、見ることの出来た『天元算法利伝記』の「無尽」を中心とした概観を試みておく。ただし、縦のものを横に記す。

「見返し」に、つぎの5行がある。

只九九四拾五口ヲ以割物一切口傳
無尽講勘定平均法数廿二通
〔新版〕天元算法利傳記

諸品算術掛テ割傳法ヲ書記

新法口傳一人藝古　吉源流

〔新版〕天元算法利傳記（〔新版〕は割り書きになっている。）

とは表紙の題簽にもあるが、これが原題簽か否かは分からない。

最初の丁は版心に“初”とあり、表裏にわたって「算法利傳記序」と題する漢文の序があり、最終行の年紀は「文久四年甲子立春」とある。署名はない。

次の丁は“一”とあり、所々に仮名を振った仮名まじり文の「はしがき」(見出しはない)がある。内容は二分され裏のほとんど全面にわたるものが「無尽」のためのものである。振りがなを略し、返点の部分を直して引用してみる。

一　先年より無尽と云講国々に数多く有ると雖も此勘定方ハ算法に合ハず分ちもなく何分の利返金なぞと元利のわきまへもなく定めて講を立る損得有て為にならす今に於て平均なし故に利算（ここに勘の字なし）元徳講記と云書を作り甲乙無く損得もなく平均の勘定に仕立て法を書き記す事に曰く村々町々所によりて利足色々あり但五分利平均六分利平均七分八分或ハ一割一割二分利までいろいろ数あり後法を見る算を以て作るなり

つぎが第二丁である。表裏に目次がぎっしりある。「無尽」に関しては

利算勘元徳講記二十二通リ

とある。

第四丁表の最後の行に

利算勘元徳講記無甲乙手取法ヲ出ス

とあり、その丁裏には「利足五分　年ニ一會十口」から始まって「利足壱割二分　月ニ一會十六口」まで22の項目が並んでいる。

そして、この丁数は三十まで続き、そのつぎにまた丁数一となって、そこから利算勘元徳講記が始まる。十七丁にその解説があり、別内容で二十六丁表まで、その裏に後書きと

元治甲子年春吉辰

信州伊那郡田切村

吉瀬源兵衛　印

とある。合計五十七丁である。前述の目次の最後に「紙数五十八枚」とあるが不明である。

丁付けの工合といい、序文の見出しが「算法利伝記序」で、途中に「利算勘元徳講記」が現れ、後書きの書き出しが「日用算法利伝記」であることといい、当初２冊のものを予定を変更して１冊にしたという印象を受ける。ただし版心上部はすべて「算法」である。

1. そのままに

先ず、上述の所（利算勘元徳講記の第９番、後半の第六丁裏）をそのまゝ掲げる。

利算勘元徳講　　　　年ニ一會口数十口

銀百匁手取十ケ年ニ元利返金法　　　　利足八分定メ

銀　拾　匁	初會一口掛金十口	拾四匁九分〇　三毛	初會取返金
九匁四分五厘五毛	二會掛金九口	拾四匁弐分七厘九毛	二會取返金
八匁八分五厘弐毛	三會掛金八口	拾三匁五分九厘五毛	三會取返金
八匁壱分七厘五毛	四會掛金七口	拾弐匁八分三厘三毛	四會取返金
七匁三分九厘八毛	五會掛金六口	拾壱匁九分六厘八毛	五會取返金
六匁四分八厘四毛	六會掛金五口	拾匁〇九分六厘一毛	六會取返金
五匁三分六厘五毛	七會掛金四口	九匁七分四厘二毛	七會取返金
三匁九分〇　六毛	八會掛金三口	八匁一分六厘九毛	八會取返金
壱匁七分七厘五毛	九會掛金二口	五匁九分	九會取返金
返金〆百〇弐匁三分五厘	此二匁三分	壱匁五分六厘	拾會取返金
五厘ハ満會取主エ渡ス分成		百〇三匁九分一厘	満會取分成

二口元利〆百〇六匁四分四厘八毛ノ取分ト成

2. 書き直し

次に、算用数字にし、後の説明のための記号を補ったものを記す。(a1)、(b2) などは次の節から、その右にある数値をそれらの記号で引用するために付けたものである。

利算勘元徳講　　　　年に１会口数10口

銀100匁手取10か年に元利返金法　　　　利息８分と定める

(a1)	10.000匁	初会１口掛金10口	(b1)	14.903匁	初会取り返金
(a2)	9.455匁	２会　掛金９口	(b2)	14.279匁	２会取り返金
(a3)	8.852匁	３会　掛金８口	(b3)	13.595匁	３会取り返金
(a4)	8.175匁	４会　掛金７口	(b4)	12.833匁	４会取り返金
(a5)	7.398匁	５会　掛金６口	(b5)	11.968匁	５会取り返金
(a6)	6.484匁	６会　掛金５口	(b6)	10.961匁	６会取り返金
(a7)	5.365匁	７会　掛金４口	(b7)	9.742匁	７会取り返金
(a8)	3.906匁	８会　掛金３口	(b8)	8.169匁	８会取り返金
(a9)	1.775匁	９会　掛金２口	(b9)	5.900匁	９会取り返金
(a10)	返金〆102.35匁		(b10)	1.560匁	10回取り返金

(a11) 2.35匁は満会取り主に渡す分である。(b11) 103.910匁（一応）満会取り分である

(b12)　２口元利106.448匁の取り分となる

（満会取り主の）

3. 適用のしかた

この「無尽」の関係者は11人、各会（回）手取り額は100匁である。経費のようなものは考えていない。だから、実施にあたってはその点工夫が必要となる。

1) 初会 （第一年の初め）

10人が（a1）の「掛け金」を出す。　10.000×10＝100匁

これを残りの1人が受け取る。この人が「初会取り」の人であって彼は次会から（b1）の金額を続けて10回「返金」することになる。

2) 二会（第二年の初め）

「初会取り」が（b1）の14.903匁を「返金」として出す。

前会に（a1）の「掛け金」を出した10人のうち9人が（a2）の「掛け金」を出す

14.903＋9.455×9＝99.998≒100匁

10人のうちの残りの1人が、この金を受け取る。

いま受け取った者が「二会取り」であって、彼は次会から（b2）の金額を続けて9回「返金」することになる。

3) 三会（第三年の初め）

「初会取り」が（b1）の14.903匁を「返金」として出す。

「二会取り」が（b2）の14.279匁を「返金」として出す。

前会に（a2）の「掛け金」を出した9人のうち8人が（a3）の「掛け金」を出す

14.903×14.279＋8.852×8＝99.998≒100匁

9人のうちの残りの1人が、この金を受け取る。

いま受け取った者が「三会取り」であって、彼は次会から（b3）の金額を続けて8回「返金」することになる。

4) 四会（第四年の初め）

「初会取り」が（b1）の14.903匁を「返金」として出す。

「二会取り」が（b2）の14.279匁を「返金」として出す。

「三会取り」が（b3）の13.595匁を「返金」として出す。

前会に（a3）の「掛け金」を出した8人のうち7人が（a4）の「掛け金」を出す。

14.903＋14.279＋13.595＋8.175×7＝100.002≒100匁

8人のうちの残りの1人が、この金を受け取る。

いま受け取った者が「四会取り」であって、彼は次会から（b4）の金額を続けて7回「返金」することになる。

以下しばらく同様であるので途中を省略する。

5) 九会（第九年の初め）

「九会取り」の受け取る金額と式とを示す。（b1）から（b8）までの金額と（a9）の2倍との和である。

14.903＋14.279＋13.595＋12.833＋11.968
＋10.961＋9.742＋8.169＋1.775×2＝100匁

6) 十会（第十年の初め）

（b1）から（b9）までを合計すると

14.903＋14.279＋13.595＋12.833＋11.968
＋10.961×9.742＋8.169＋5.900＝102.35匁

となる。これが（a10）の示す数値である。

「十会取り」は100匁を受け取り、世話役は2.35匁（(a11）に示す金額）を預かり、年利5分で利殖しておかねばならない。実際問題としてはどうなるだろうか。

7) 第十一年の初め（満会）

「十会取り」は（b10）の金額を「返金」として出す。

（b1）から（b10）までの金額の合計は（b11）となる。103.91匁である。

前会の端数2.35匁は1年経過したから利息がついて2.538匁となっている。

最後に受け取る「満会取り」の受け取る金額はこれらの和である。

103.91＋2.35×(1＋0.08)＝106.448匁

これが（b12）の示す金額である。

かくして、「初会」から満10年経過して、この無尽は終了する。

4. これらの数字の「正しい」ことの検証

しばらく、個々の「取り手」について追ってみる。

以下に用いる記号を定義しておく。なお、ここで利子8％である。

FS（n）はn年後の複利終価、FNS（n）はn年後の複利年金終価とする。

1) 「初会取り」の場合

「初会」に受け取った金の「満会」時の終価

100× FS(10)＝100×2.15892500＝215.8925　(1)

「二会」から「満会」まで10回払った「返金」の「満会」時の終価

14.903× FNS(10)＝14.903×14.487＝215.899761

もし、手元の表の桁数いっぱいを用いると[2)]

14.902949×14.48565247＝215.892501676　(2)

(1)と(2)とならばたしかに一致と見做せよう。

以後は適宜丸めた数値を用いる。

2)　「二会取り」の場合

「二会」に100匁受け取るが、「初会」に10匁掛けて1年経過している。つまり、「二会」の時点では10.8匁になっている。従って「二会」に受け取った正味は

$100-10.8=89.2$

である。これの「満会」時の終価は

$89.2\times FS(9)=89.2\times 1.999=178.3178$　(3)

「三会」から「満会」まで払った「返金」の「満会」時の終価は

$14.279\times FNS(9)=14.279\times 12.486=178.287594$　(4)

数字が原本の表にあわせて丸めてあるので(3)と(4)とは四捨五入して小数1位までの一致であるが、より精密な数字によれば密合することはうなづける。

3)　「三会取り」の場合

「三会」に受け取る金・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・100

「初会」の「掛け金」の「三会」時の元利　10×1.08^2・・・・ 11.664

「二会」の「掛け金」の「三会」時の元利　9.455×1.08・・・・ 10.2114

従って、正味受け取り分は

$100-11.664-10.2114=78.1246$

である。これの「満会」時の終価は

$78.1246\times FS(8)=78.1246\times 1.851=144.608635$

「四会」から「満会」まで払った「返金」の「満会」時の終価は

$13.565\times FNS(8)=13.595\times 10.637=144.610015$

上のふたつの終価も一致すると認めて良いであろう。

4)　「四会取り」の場合

「四会」に受け取る金・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・100

「初会」の「掛け金」の「四会」時の元利　10×1.08^3・・・・ 12.59712

「二会」の「掛け金」の「四会」時の元利　9.455×1.08^2・・・・ 11.028312

「三会」の「掛け金」の「四会」時の元利　8.852×1.08・・・・ 9.56016

従って、正味受け取り分は

66.814408

である。これの「満会」時の終価は

$66.14408\times FS(7)=66.14408\times 1.714=114.519895312$

「五会」から「満会」まで払った「返金」の「満会」時の終価

$12.833\times FN\,S(7)=12.833\times 8.923=114.508859$

やはり、はじめの「掛け金」を考慮に入れた「受け取り金」と、その後に、一定額を

「返金」した分との「満会」時の終価は一致している。

よって、以後、途中を省略して「九会取り」、「十会取り」、「満会取り」を調べる。

5)　「九会取り」の場合

「九会」に受け取る金・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・100

「初会」の「掛け金」の「九会」時の元利　10×1.08^8・・・ 18.5093021028

「二会」の「掛け金」の「九会」時の元利　9.455×1.08^7・・・ 16.2042084613

「三会」の「掛け金」の「九会」時の元利　8.852×1.08^6・・・ 14.0470115067

「四会」の「掛け金」の「九会」時の元利　8.175×1.08^5・・・ 12.0117570278

「五会」の「掛け金」の「九会」時の元利　7.398×1.08^4・・・ 10.0648973261

「六会」の「掛け金」の「九会」時の元利　6.484×1.08^3・・・ 8.167972608

「七会」の「掛け金」の「九会」時の元利　5.365×1.08^2・・・ 6.267736

「八会」の「掛け金」の「九会」時の元利　3.906×1.08・・・ 4.21848

従って、正味受け取り分は

10.5186349673

である。これの「満会」時の終価は

〔正味受け取り分〕$\times FS(2)=10.5186349673\times 1.1664=12.26893583$

「十会」から「満会」まで払った「返金」の「満会」時の終価は

$5.9\times FNS(2)=5.9\times 2.08=12.272$

5)　「十会取り」の場合

「十会」に受け取る金・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・100

実は前述のように、「初会取り」から「九会取り」までの「返金」の和は100を越える。越えた分は「満金取り」に回される。だから「十会取り」は100匁だけを受け取る。

「初会」の「掛け金」の「十会」時の元利　10×1.08^9・・・ 19.990046271

「二会」の「掛け金」の「十会」時の元利　9.455×1.08^8・・・ 17.500545151382

「三会」の「掛け金」の「十会」時の元利　8.852×1.08^7・・・ 15.1707724272

「四会」の「掛け金」の「十会」時の元利　8.175×1.08^6・・・ 12.9726975901

「五会」の「掛け金」の「十会」時の元利　7.398×1.08^5・・・ 10.870089122

「六会」の「掛け金」の「十会」時の元利　6.484×1.08^4・・・ 8.8014104166

「七会」の「掛け金」の「十会」時の元利　5.365×1.08^3・・・ 6.75835488

「八会」の「掛け金」の「十会」時の元利　3.096×1.08^2・・・ 4.5559584

「九会」の「掛け金」の「十会」時の元利　1.775×1.08・・・ 1.917

従って、正味受け取り分は

1.44312676463

である。これの「満会」時の終価は

〔正味受け取り分〕× FS(1)＝1.44312576463×1.08＝1.5585758258

「満会」のときに払った「返金」は（徒って「満会」時の終価は）　1.56

7)　「満会取り」の場合

この場合、まず、これまでの掛け金の元利合計を求めてみる。

「初会」の「掛け金」の「満会」時の元利　10×1.08^{10}・・・　21.5882499727

「二会」の「掛け金」の「満会」時の元利　9.455×1.08^{9}・・・　18.9005887493

「三会」の「掛け金」の「満会」時の元利　8.852×1.08^{8}・・・　16.3844342214

「四会」の「掛け金」の「溝会」時の元利　8.175×1.08^{7}・・・　14.0105133973

「五会」の「掛け金」の「満会」時の元利　7.398×1.08^{6}・・・　11.7396962411

「六会」の「掛け金」の「満会」時の元利　6.484×1.08^{5}・・・　9.52712324997

「七会」の「掛け金」の「満会」時の元利　5.365×1.08^{4}・・・　7.2990232704

「八会」の「掛け金」の「満会」時の元利　3.906×1.08^{3}・・・　4.920435072

「九会」の「掛け金」の「満会」時の元利　1.775×1.08^{2}・・・　2.07036

であるから、これらの総和は

106.441424174

である。

次に、「満会取り」自身以外の全員の「返金」の和は（b11）にある

103.91

で、それと、前会に取り分けておいた2。35匁（a11）に1年の利息がついて

2.538（＝2.35×1.08）

となっている。この二者を加えて

106.448（＝103.91＋2.538）

で、これが（b12）にある、「満会取り」の取り分である。自らの「掛け金」の元利合計の和とほぼ一致している、といってよい。

以上で、参加11人の誰にとっても“公平”であることがわかる。

5. これらの数字の作りかた

意外に精密な数値であった、という感想を持つ。

いままで見てきたので、この雛形の作り方は分かったようなものであるが、具体的に眺める。

1)　「初会」の場合

「初会取り」は「初会」に100匁得て、これを次会から始めて1年毎に10年で返すの

である。だから年利8％の n 年の年賦金表の値を NP（n）であらわすと

100× NP(10)＝100×0.14902949＝14.902949

を1年毎に10回、10年で返せばよい。原本では

14.903

を用いている。これが（b1）の「初会取り返金」である。

2)　「二会」の場合

「初会取り」が14.903匁を「返金」として出す。これに「初会取り」、「二会取り」以外の9人が「掛け金」として出して、合計を100匁にして、それを「二会取り」が取る。従って、ここの「掛け金」は

9.455（＝〔100－14.903〕／9）

で、これが（a2）の数字である。

さて、「二会取り」は、100匁受け取るのであるが、「初会」に10匁掛けていて、1年経って利息がつき、10.8匁になっているから、正味受け取り金は89.2匁である。

これに NP（9）を掛ければ、以後9年に渡って返す「二会取り返金」即ち（b2）の数字となる。

14.279＝(〔100－10×1.08〕× NP(9)＝89.2×0.16007971)

3)　「三会」の場合

「初会取り」が（b1）、「二会取り」が（b2）の金額を出す。従って「四会取り」以下8人の「掛け金」(a3）は

8.852（＝〔100－14.903－14.279〕／8)

である。さて、「三会取り」は100匁受け取るが、前に「初会」に10匁「二会」に9.455匁「掛けて」おり、それぞれ2年、1年経過しているから、正味受け取り金は

78.1216（＝100－10×1.082－9.455×1.08)

よって

78.1216× NP(8)＝78.1216×0.17401476＝13.595

として（b3）すなわち「三会取り返金」が得られる。

以下、同様に類推が簡単なので、それらは省略して「掛け金」の無くなる所を見る。

4)　「十会」、「満会」の場合

「九会」で「九会取り」の者の「返金」が決まると、「初会取り」から「九会取り」までの「返金」の合計が100匁を越えてしまう。だから「十会」と「満会」では「掛け金」はないのである。だから、この無尽は「掛け金逓減満会前終了」の一例である。

6. まとめ

5節で分かるように、これらの「数値」を作るには「年賦金表」を中心とし、「複利終価表」も用いた。その前の、いわば検算では「複利年金終価表」を用いた。

そして、筆者は結果の精密さに驚嘆したのであった[3]。

だから、当時はこれらの表が質・量ともに十分に存在した、と想像する[3]。

ただ、原著者がよく理解していたかというと疑問とせざるを得ない。それは、これらの表のすぐあとに、つぎのような問題とそれに対する解とがあるからである。

○銀百匁ヲ拾年無利足にて借用仕引合是ヲ拾年ニ返金仕壱年ニ何程宛と問

但五分利〆

答　七匁九分五厘○四五九

10年無利息はともかく、7匁9分…の金を10年にわたって年1回返して、それで借りた100匁を皆済したと思っているとは貸した方としてはたまったものではない。

これは、年利5分、n年後の複利年金終価をFNS (n) で表すと

$$7.950459\times \mathrm{FNS}(10)=7.950459\times 12.57789254=100.000018946$$

であるから、7.950459匁を5分の年利で10年積み立てれば100匁になる、ということを取り違えているのである。

もしかしたら、この問題の前の問題の最後に「乗除口伝」とあるから、ここでも韜晦しているのかも知れない。

二十二種の「無尽」のうち、九番目だけを詳しく述べた。さきに「原理はみな同じ」と述べたが、それは各々の (b1) にあたる数値すなわち「初會取返金」の値を調べて、それらがすべて、その利率に対応する $\mathrm{NP}(n)\times 100$ と一致することを、「表」または直接計算で確かめたからである。

そもそも、この事に気付いたのが解決の発端であった。

この書の「無尽」を言葉で要約してみると

1)　「無尽講」の開いている期間中は、扱う「かね」はすべて、所定の利子で「時の流れ」に乗っている。

2)　「満会」、すなわち解散のとき、講員すべてにとって、払った金と受け取った金の「終価」は一致する。

3)　「取り」のときに受け取る「金額」は一定である。すなわち100匁である。ただ、ある定数をすべてに掛ければ100匁でなく幾らにでもできる。一定なのが特徴である。

さて、経済活動なのだから「かね」には利子がつく、のは常識なのであろうが、そのことをはっきり意識したからこそ、2) のことが実現できた、と言える。原著者は 2) のことを「公平」と言っているのであろう。また彼は当然 3) のことにも言及している。

2) については「講員」ひとりひとりについては払った金と受け取った金の「終価」が

一致しているが、「終価」の額は、さきに「取る」者のほうが多いから、周囲に高金利の世界があればさきに「取る」者のほうが有利である。

従って改良の方向としては全員の「終価」の額が一致するように、受け取る「金額」を逓増して設計することが考えられる。

過去の実際としては「取る」チャンスの「公平」のために「入札」、「抽選」等の工夫があったようである。

7. おわりに

以上、丁数57の書物のうち、ごく一部分を調べてみた。林鶴一の言う「他ノ場合ニ適用シ得ベキ算術」を明らかにすることが出来て（そう信じて）、ほっとしている。

無尽は古来“相互扶助”“庶民金融”として、なじまれ用いられたようで、その数理は和算家にとっては等比数列、等比級数の応用として親しまれた。しかし、今や営業無尽の無尽会社は相互銀行となり、ついには第二地銀となって無尽は消え去ってしまった。

感慨なきを得ない。

なお、他に原資料と参考資料との御恵投を戴いているので、時期をみて取り掛かりたい。

最後に、ここで取り扱った書物は、その存在が明らかなので「写真」は省略した。

（平成10年5月6日受理）

注

1) 林鶴一：和算研究集録（下巻）p.851。および、日本数学史学会：第4回数学史研究発表会予稿集 p.4—1～4—2

2) 松浦常三郎：珠算の実務と応用計算（昭和57.11.30）珠算実務教育研究会発行、の付表

3) 村田全：日本の数学　西洋の数学——比較数学史の試み——（1981. 5. 25）中公新書、のP.121に円周率の求め方に関して「和算史家の中には、このような厖大な計算の背後に、（今は失われたが）相当高級な数表の用意があったと推測しておられる人もあるが、おそらくそれは事実であろう。」とある。

論　説

VALUES OF π FROM ANTIQUITY TO RAMANUJAN †

——V. MISHRA* and S. L. SINGH**——

ABSTRACT

Āryabhaṭa I's value of π is considered as an important contribution in the development of Indian mathematics. In this paper various significant values of π (mainly from Indian sources), including its series representation, have been surveyed and discussed.

1 VALUES OF π DERIVED FROM ĀRYABHAṬA'S VALUE

Nowadays it is a well-known fact that, in a circle, the length of circumference (say c) divided by the length of diameter (say d), i. e., c/d, is transcendental. In modern mathematical sciences, this ratio, c/d, is denoted by π (pi). William Jones (1706 A. D.) (cf. [11]) was the first having used Greek symbol for c/d. In Vedic period, c/d appears to have been denoted by *trita*.

bhinad valasya paridhīn iva tritaḥ. [*Ṛgveda* 1. 52. 5 (cf. [8, p. 187])]

This means (according to [8, p. 187]) : An external triangle crosses the circumference of circle. The ratio of circumference (*paridhi*) to diameter (*vyāsa*) of a circle is approximately 3 : 1 (better 22/7). Such a ratio is called *tritaḥ*. (Trita is the name of a Vedic deity, and the passage cited here is usually taken to be meaning : "(Indra), like Trita, broke Vala's enclosure (*paridhi*).")

The same word for the above ratio is also claimed to have been used in *Atharva-veda* (cf. [8, p. 326], see also [43]).

For a good value of π, *Āryabhaṭīya* (= *AB*) (ca. 499 A. D.) of Āryabhaṭa I (b. 476 A. D.) [42, p. 45] gives the following surprising rule :

† 和文タイトル：古代からラーマーヌジャンまでの円周率の値。

* Dept. of Mathematics, Sant Longowal Inst. of Engg. & Tech., Longowal 148106, India.

* * Dept. of Mathematics, Grurukula Kangri University, Hardwar 249404, India.

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥ 2.10 ॥

This means (cf. [42, p. 45]): 100 plus 4, multiplied by 8, and added to 62000 : this is the nearly approximate measure of the circumference of a circle whose diameter is 20000.

That is,

$$c = (100+4) \cdot 8 + 62000 = 62832 \text{ (appr.)}$$

$$d = 20000,$$

and thus

$$\pi = 62832/20000 = 3.1416.$$

J. H. Lambert (1728 — 1777 A. D.) was the first to prove irrationality of π. Its proof appeared in his *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II* (Berlin, 1770, pp. 140-169 ; refer also [14]) . A better proof of irrationality of π was given by A. M. Legendre (1752—1833 A. D.) (cf. [14]) in his *Éléments de géométrie.*

On the other hand, transcendence of π was proved by a German mathematician C. L. F. Lindemann (1852—1939 A. D.) in 1882 by modifying the proof of Hermite theorem; thereby, indicating that circle-square conversion is impossible in Euclidean geometry. Using the theory of continued fractions, the value of π (=62832/20000) can be written as

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{11}}}.$$

Now we shall consider various sources for successive convergents of this continued fraction.

(1) The following culture areas are the main sources for the first and simplest approximation, 3. The various references are :

A *Hindu sources* :

(I) *Vedas* such as *Ṛgveda* and *Atharvaveda.*

(II) *Purāṇas* such as *Ādityapurāṇa* (cf. [21]), *Kūrmapurāṇa* (cf. [11, references and notes]), *Matsyapurāṇa* (cf. [21]) and *Vāyupurāṇa* (cf. [21]).

(III) *Baudhāyana Śulbasūtra* [41, p. 82].

(IV) *Mahābhārata* (cf. [24]).

(V) A few compositions on *Pāṭī*-mathematics such as *Gaṇitakaumudī* of Nārāyaṇa

Paṇḍita (cf. [28]).

(Ⅵ) *Brāhmasphuṭasiddhānta* (= *BrSS*) (628 A. D.) of Brahmagupta (b. 598 A. D.) (cf. [11]).

B *Jaina sources* :

(Ⅰ) *Gaṇitasārasaṅgraha* (= *GSS*) of Mahāvīra (ca. 850 A. D.) (cf. [28]).

(Ⅱ) *Jambūpaṇṇattisaṃghaho* (= *JPS*) of Padmanandin (ca. 1000 A. D.) (cf. [13]).

(Ⅲ) *Tattvārthādhigamasūtra* (= *TDS*) of Umāsvāti (ca. first century A. D.) (cf. [13]).

(Ⅳ) *Tiloyapaṇṇati* (= *TP*) of Yativṛṣabha (fl. 473—609 A. D.) (cf. [13]).

(Ⅴ) *Tiloyasāra* (= *TS*) of Nemicandra (ca. 975 A. D.) (cf. [13]).

C *Buddhistic source* (refer to [21]) :

Buddhistic cosmography (centuries before Christian era).

D *Christian sources* (refer to [21]) :

(Ⅰ) Old Testament part (ca. 900—500 B. C.) of the *Bible*.

(Ⅱ) Koran.

(Ⅲ) Jewish Talmud (ca. 500 A. D.).

E *Chinese sources* (refer to [21]) :

(Ⅰ) *Chou-pei suan*-ching (Arithmetical Classic of the Gnomon and the Circular Paths of Heaven, ca. 300 B. C.).

(Ⅱ) *Chiu-chang suan-shu* (Nine Chapters on Mathematical Art, ca. 250 B. C.).

F *Other sources* (refer to [21]) :

(Ⅰ) Babylonian cuneiform text BM 85194 (ca. 2000 B. C.).

(Ⅱ) Egyptian Cairo Papyrus (ca. third century B. C.).

(Ⅲ) Roman Vitruvius' text *De Architectura* (first century B. C. —A. D.).

(2) 22 / 7, called the Archimedean value.

This value is said to have been used by Heron (ca. 75 A. D.) (cf.[11]), Nehemiah (ca. 150 A. D.) (cf.[11]) and al-Zarqālī (d. 1100 A. D.) (cf.[19]).

Indian sources (cf. [28] and [31]) :

(Ⅰ) *Līlāvatī* (= *LV*) of Bhāskara Ⅱ (b. 1114 A. D.) as rough (*sthūla*) value.

(Ⅱ) *Mahāsiddhānta* (= *MSi*) of Āryabhaṭa Ⅱ (ca. 950 A. D.) as accurate (*sūkṣma*) value

(Ⅲ) Lalla's *Śiṣyadhīvṛddhidatantra* (= *SiVT*) (ca. 748 A. D.).

(Ⅳ) *Gaṇitamañjarī* (= *GM*) of Gaṇeśa (ca. 1575 A. D.).

(Ⅴ) *Padārthādarśa* of Rāghavabhaṭṭa (ca. 1493 A. D.).

(Ⅵ) *Kautukalīlāvatī* of Rāmacandra.

(Ⅶ) *Nāradapurāṇa*.

(3) 355/113, called the Chinese value, is furnished by Tsu Ch'ung-chih (430—501 A. D.) (cf. [4. p. 228] and [11]), in *Tantrasamuccaya* of Nārāyaṇa (ca. 1450 A. D.), and in *Golasāra* and *Tantrasaṅgraha* (= *TS*) of Nīlakaṇṭha (fl. 1443—1543 A. D.) . For Indian sources, see [11].

It is remarkable that Srinivasa Ramanujan (1887—1920 A. D.) ([39], see also [3, pp.140-141] and [40, pp.208-210]) in course of squaring the circle finds an interesting geometric construction for $\sqrt{355/113}$.

(4) Āryabhaṭa Ⅰ's value, 62832/20000, is employed mainly in astronomical works composed under his influence to calculate the diameter of the earth from its circumference. Bhāskara Ⅱ refers to the reduced value 3927/1250 in *LV* and calls it accurate (*sūkṣma*) [28]. A few other references are [10] : *SiVT*, Pauliśa's *Pauliśasiddhānta* (ca. 8th century A. D.), Utpala's commentary (10th century A. D.) on *Bṛhatsaṃhitā* and Yallaya's commentary (ca. 15th century A. D.) on *AB*.

Other sources :

Composition Sphaerarum (cf. [10]) and *Tarkīb al-aflāk* (cf. [19]) of Ya'qūb ibn Ṭāriq (8th century A. D.) of Bagdad, and works of al-Khwārizmī (9th century A. D.) of Arab and al-Zarqālī (11th century A. D.) of Spain[10]. These scholars credit Āryabhaṭa I for his good value of π . Evidently, Āryabhaṭa Ⅰ's value of π travelled to Spain and other European countries via Arab intermediaries.

Besides various applications of Āryabhaṭa Ⅰ's value of π, it is employed indirectly to get another value of π, 600/191.

Sources : *SiVT*, *Sūryasiddhānta* (= *SuSi*) (ca. 400 A. D.), *GM* and *MSi* (cf. [28]).

The way of representation of Āryabhaṭa Ⅰ's value of π is entirely different from that given by Greeks, Appolonius (3rd century B. C.) and Ptolemy (ca. 200 A. D.). They gave an expression for π in sexagesimal unit($=3^\circ 8' 30''$), which when disposed in fraction gives [10]:

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = \frac{377}{120} = 3.141666\ldots$$

(Remarkably this value is slightly less accurate than that of Āryabhaṭa Ⅰ's value).

As a concluding remark we insist Āryabhaṭa Ⅰ's value to be of independent origin as it is also clear from Whish's [28, p. 2] statement that Āryabhaṭa I obtained the value himself from the inscribed and circumscribed polygons of 768 sides to a circle.

2 $\sqrt{10}$, A VALUE OF π

2. 1 Among several ancient approximate values available for π, $\sqrt{10}$ is found in Jaina literature and is regarded sufficiently accurate (*sūkṣma*) in the most of Jaina and several Hindu literature (see, for instance, [11], [13] and [28]). Its importance and popularity can be judged on the ground that it is used excessively in Arabian, Chinese, European, Japanese and other mathematical texts. This seems due to the transmission of mathematical and astronomical tradition to these countries from India (see, for instance, [20] and [25]).

The implicit use of π ($= \sqrt{10}$) as 3.16 is delineated in Japanese literature from 10th to the beginning of 17th century A. D., and thereafter 3.162 till 18th century. Chinese applied $\pi = \sqrt{10}$ directly and indirectly from 2nd century A. D. onwards till 18th century. It is even said that for a wheel of 10 feet diameter, Chinese Tan Tai (18th century A. D.) observed its perimeter a little more than 31.6 feet. The application of $\pi = \sqrt{10}$ is contained in Arabian and European treatises composed in between 8th and 16th centuries A. D. The value 3.16 is also implied in *Jīvājīvābhigamasūtra* (*sūtra* 112), which reads (cf. [34, p. XLVI]) : "*for an increment of 100 in diameter, the circumference increases by 316*". (Note that 3.16 and 3.162 are the values of $\sqrt{10}$ correct to two and three places of decimal respectively.) A few Jaina and Hindu texts of first century A. D. and onwards calculate the value of $\sqrt{10}$ based on $\sqrt{a^2+r} = a + r/(2a)$ as $3 + 1/6 = 19/6$ [13]. This formula was also known to ancient Babylonians (1800—1600 B. C.), Greeks (ca. first century A. D.), Chinese (oa. 280—473 A. D.), Egyptians and Arabs (see [13] and [15]).

The following Jaina works deal also with $\pi = \sqrt{10}$.

(I) *Anuyogadvārasūtra* (first century B. C.).
(II) *Bhagavatīsūtra* (ca. 350 B. C.)
(III) *Gaṇitasāra* of Ṭhakkura Pherū (ca. 1315 A. D.).
(IV) *GSS.*
(V) *Gaṇitatilaka* of Śrīpati (ca. 1050 A. D.).
(VI) *Jambūdīvapaṇṇatti* [originally proclaimed by Lord Mahāvīra (6th century B. C.)].
(VII) Jambūdvīpasamāsa and *TDS* of Umāsvāti (first century A. D.).
(VIII) *JPS.*
(IX) *Jyotiṣakaraṇḍaka* of Pūrvācārya (ca. 300 A. D.).
(X) *Laghukṣetrasamāsa* of Ratnaśekhara Sūri (ca. 1440 A. D.).
(XI) *Sūriyapaṇṇatti* (ca. 500 B. C. —500 A. D.).

(XII) *TP.*
(XIII) *TS.*

For detailed analyses on this aspect, refer to [11], [13], [20], [28] and [34, p. XLV].

Hindu sources for $\pi = \sqrt{10}$ are (cf. [20] and [28]) :

(I) *Āryabhaṭīyabhāṣya* of Bhāskara I (629 A. D.).
(II) *BrSS.*
(III) *Kriyākramkarī* (= *KKK*) of Śaṅkara Vāriyar (fl. 1500—1560 A. D.).
(IV) *MSi.*
(V) *Pañcasiddhāntikā* of Varāhamihira (ca. 550 A. D.).
(VI) *Siddhāntatattvaviveka* of Kamalākara (ca. 165a A. D.).
(VII) *SuSi.*
(VIII) *Triśatikā* of Śrīdhara (ca. 750 A. D.).
(IX) *Viṣṇudharmottarīya-Paitāmahasiddhānta* (ca. 500 A.D.).

2. 2 Mādhavacandra [33], p. 89], Chakravarti [6], Viśuddhamatī [38, pp. 88-92], Hankel (cf. [5, p. 647]), Hunrath (cf. [5, p. 648]), Hobson [32] and others (see, for instance, [17] and [23]) have given plausible rationales for the following formula :

Circumference of circle $= \sqrt{10\ (\text{diameter of the circle})^2}$

(wherein $\sqrt{10}$ is an approximate value of π).

Due to an idea of Bovillus work (refer to [20]), we give the following new relationship.

THEOREM. *A wheel of radius r is rolling on the ground along a line L without slipping from the point O such that OQ = $\overset{\frown}{OP}$, where P is a point at one fourth of the circumference on the wheel and Q on the line. If PQ is supposed to be a circular arc with its centre A of the radius of curvature lying on the line through CO and if AO = k, then*

$$(2.\ 1) \qquad k = r\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right).$$

PROOF. Refer to the following self-explanatory figure.

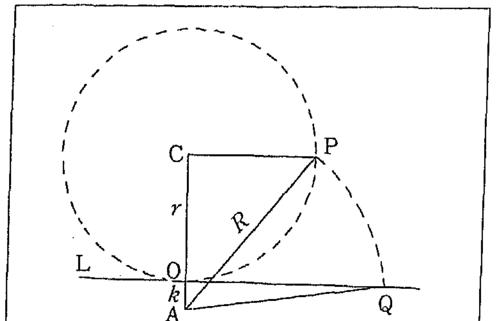


Figure 1 : Bovillus' geometrical problem

We know that the equation of a circle with centre (g, f) and radius R is governed by the equation,

(2. 2) $\quad (x-g)^2+(y-f)^2=R^2.$

The circle through arc PQ lies on the centre $(g,f)=(0,-k)$. Using it in (2. 2),

(2. 3) $\quad x^2+(y+k)^2=R^2.$

As the circle (2. 3) passes through the points P and Q with the respective coordinates (r, r) and $\left(\frac{\pi r}{2}, 0\right)$, therefore, applying these coordinates in (2. 3), we obtain

(2. 4) $\quad r^2+(r+k)^2=R^2$, and

(2. 5) $\quad \left(\frac{\pi r}{2}\right)^2+k^2=R^2.$

Equating (2. 4) and (2. 5) will yield

(2. 6) $\quad k=r\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$

Using the well-known series representation for π

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

in (2. 6), which Euler (cf. [4, pp. 496-497]) obtained in 1736 from cosine series, we establish the relation between k and r as stated in (2. 1).

In his "*Liure singulier et utile*" (1543) Charles Sovillus using $\pi=\sqrt{10}$ has shown that $k=r/4$ for the above construction [20].

3 SOME OTHER VALUES OF π

Amongst the various values of π occurring in *Śulbasūtras* the implied value 25/8=3.125 from Mānava *Śulbasūtra* (= *MSS*) 11. 15 exists as the best value. This value is also reported to have been contained in the old Babylonian tablet (1800—1600 B. C.) ([36, p. 47]) and utilized by Chinese Chih (4th century A. D.) and by European of modern times (17th and 19th centuries A. D.) (see [23, references]).

Whereas amongst the set of values of π obtained from various improved circle-square conversion rules occurring in the commentary on *Āpastamba Śulbasūtra* (= *ASS*) by Sundararāja (ca. 1500 A. D.), the value 3.14151... (*ASS* 3.3, [44, p. 54]) is treated as the best value. The correction factors of these conversion rules are said to have been obtained utilizing Āryabhaṭa I's value of π [27].

16/5, a value of π

A formula equivalent to

(3. 1) $$\sin\theta\approx\frac{4\theta(180-\theta)}{40500-\theta(180-\theta)}\quad(\theta\text{ in degrees}),$$

appears in various texts, viz., *Mahābhāskarīya* (ca. 625 A. D.) of Bhāskara I, *BrSS*, *Vaṭeśvara Siddhānta* (904 A.D.) of Vaṭeśvara, *Siddhānta Śekhara* (ca. 1039 A. D.) of Śrīpati, *LV* (Bhāskara II considers the rule (3. 1) to be approximate), *GK* and *Grahalāghava* (ca. 1520 A. D.) of Gaṇeśa Daivajña. For plausible proofs, consult [9], [16] and [30]. Kim Plofker [38] remarks about this formula:

> ... *the excellence and ingenuity of this algebraic rule have inspiredmany conjectures as to its origin.*

Figure 2 graphically shows errors for various values of θ.

$$\text{Percentage error } E_\theta=\left[\frac{4\theta(180-\theta)}{[40500-\theta(180-\theta)]\sin\theta}-1\right]\times100.$$

Table

$E_0=0$	$E_{30}=0$	$E_{70}=-0.07$
$E_{10}=0.92$	$E_{40}=-0.15$	$E_{80}=-0.02$
$E_{20}=0.34$	$E_{50}=-0.17$	$E_{90}=0$
	$E_{60}=-0.14$	

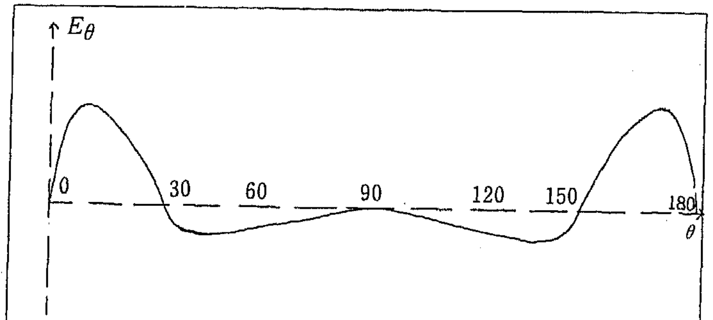


Figure 2: Rough sketch of E_θ vs. θ

Evidently, the sine formula (3. 1) is technically applicable. It may be expressed as

$$\sin\phi = \frac{16\phi(\pi-\phi)}{5\pi^2 - 4\phi(\pi-\phi)} \quad (\phi \text{ in radians}).$$

This gives

$$\pi = 16/5 = 3.2 \qquad \text{as } \sin\phi \to \phi \text{ for } \phi \to 0.$$

Other sources : MSS 11. 13, *MSS* 13.6 (due to new interpretation of Gupta [22]) and Tamil work *Kaṇakkadikāram* of Kari (ca. 13th century A. D.) . This value is said to have been used by Gaetano Rossi in 1804 A. D. See [23].

The value $\pi = (16/9)^2$:

Sources : MSS 1.27 according to Datta [7, p. 149] , commentary on *Kātyāyana Śulbasūtra* by Mahīdhara [35, p. 22], *TS* (cf. [11]), Egyptian Rhind Mathematical Papyrus, problem 50 (ca.1650 B. C.) [22]. See [22] and [27] for details.

Some values of π correct to higher places of decimal :

Surprisingly the learned scholars, namely, Śankara Vāriyar (*KKK*, cf. [12]), Putumana Somayāji (ca. 1732 A. D.) (*Karaṇapaddhati* = *KP*, cf. [12]), Nīlakaṇṭha Somayāji (1443–1543 A. D.) (*Āryabhatīyabhāṣya*, cf. [12], Śankara Varma (*Sadratnamālā* = *SM*, ca. 1823 A. D.; cf. [12]) , Ramanujan (cf. Gaṇita Bhāratī 16 (1994), 84-85 and [40, p. 205]) and Bhāratī Kṛṣṇa Tīrtha (1884–1960 A. D.) [1, pp. 362–363] furnish fairly good values of π correct to nine, ten, eleven, seventeen, fourteen and thirty-two places of decimal respectively.

4 SERIES FOR π :

Mādhava (fl. 1360–1425 A. D.) is said to have obtained, by his successors Nilakaṇtha Somayāji and Śankara Vāriyar, an equivalent of the so-called Leibniz's series (a special case of Gregory's series) with finite number of terms and three kind of remainders (correction terms). That is,

$$(4.\ 1) \qquad c_i(n) = \frac{4d}{1} - \frac{4d}{3} + \frac{4d}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{4d}{2n-1} + (-1)^n 4dR_i(n).$$

That is,

$$(4.\ 2) \qquad c_i(n) = 4ds(n) + (-1)^n 4dR_i(n),$$

where $s(n) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$, and correction terms :

$$R_1(n) = \frac{1}{4n}, \quad R_2(n) = \frac{n}{4n^2+1} \quad \text{and} \quad R_3(n) = \frac{n^2+1}{[4(n^2+1)+1]n}.$$

The series (4. 1) with correction term $R_2(n)$ is given in *KKK*, in *Yuktidīpīkā* (= *YD*) commentry on *TS*, and in *Yuktibhāṣā* (= *YB*) of Jyeṣṭhadeva (ca. 1530 A. D.) (see [26]). The correction term, $R_1(n)$, is obtained in course of Śankara's derivation of $R_2(n)$. More accurate correction term $R_3(n)$ is given in *KKK* and *YD* (refer to [26]).

From (4. 2),

$$(4.\ 3) \qquad R_1(n) = |s(n) - \pi/4|.$$

Formula (4. 1) without correction term when continued to infinity is equivalent to the so-called Leibniz's series (Leibniz, 1646—1716 A. D.) for π, that is,

$$(4.\ 4) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$$

The same series in equivalent form is also mentioned in *KP* (cf. [2, p. 265]). The series (4. 4) converges very slowly ; in order to obtain the value of π to just four places of decimal it becomes indispensable to take 24000 terms [3, p. 138]. Note that (4. 4) is a special case of Gregory's series (Gregory, 1638—1675 A. D.),

$$(4.\ 5) \qquad \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \ |x| \leqq 1.$$

KP, *KKK*, *YB* and *SM* give the slowly convergent series attributed tc Mādhava in the form (see Indian J. Math. Edu. 11 (1991), 107-110),

$$(4.\ 6) \qquad \theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \cdots, \quad |\theta| \leqq \frac{\pi}{4},$$

which is equivalent to (4. 5). By just putting $\theta = \pi/4$ in (4. 6), we obtain (4. 4).

D. T. Whiteside (cf.[26]) concludes that $R_i(n)$ (i = 1, 2, 3) are the successive convergents of the infinite continued fraction given by

$$(4.\ 7) \qquad R_i(n) = \cfrac{1/2}{2n + \cfrac{1^2}{2n + \cfrac{2^2}{2n + \cfrac{3^2}{2n+1}}}}.$$

Whereas T. Hayashi et al. (cf. [26]), by taking π =355/113 in (4. 3), find for n = 1 to 7 that all the three remainder terms sfollow the pattern,

$$(4.\ 8)\qquad R_1(n)=\cfrac{1}{4n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+f(n)}}}},$$

where $f(n)$ is a proper fraction, i. e., a positive rational number less than one.

It is remarkable that as far as the first three convergents are concerned, the form (4. 8) can also be derived from (4. 7). Also considering $\pi=62832/20000$ in (4. 3), $R_1(n)$ follow the pattern of (4. 8) for $n=1$ to 4. Since Āryabhaṭa I's value of π was entirely popular in the Āryabhaṭan school and even in the later periods, Gupta [26] prefers to base the conclusion of pattern (4. 8) on 62832/20000 rather than on 355/113.

It is worth noticing that the correction term in the series (4. 1) is quite important and helps in quick and easy oomputation of π as is evident from the following examples (cf. [29]): When $d=1$, the formula (4. 1) without a correction term gives

$c_0(19)=3.194\ldots$

$c_0(20)=3.091\ldots$

and with the third correction term R3(n), on the other side, (4. 1) gives

$c_3(19)=3.1415926529\ldots$ correct to nine places of decimal,

$c_3(20)=3.1415926540\ldots$ correct to nine places of decimal.

Thus the correction terms are very significant and make the series (4. 1) quite effective for practical purposes.

For numerous examples of different π series, refer to *KP* (cf. [37]) and *YD* (cf. [18] and [29]). The contribution of Ramanujan to rapidly convergent series for π is worth mentioning. Here is an example of one of the most rapidly converging π series given by him.

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{8}(4n)!(1103+26390n)}{9801(n!)^4(396)^{4n}}.$$

This series was used in 1986 to compute π to 17 million places [Gaṇita Bhāratī 16 (1994), 84-85].

(平成10年3月1日)

REFERENCES

1) V. S. Agrawal (ed.), *Vedic Mathematics by Svāmī Bhāratī Kṛṣṇa Tīrthajī Mahārāja*, Motilal Banarsidass, Varanasi, 1965.

2) A. K. Bag, *Mathematics in Ancient and Medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979.

3) T. S. Bhanumurthy, *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1992.

4) C. B. Boyer, *A History of Mathematics* (revised by Uta C. Merzbach), John Wiley & Sons, New York, 1989.

5) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathemamtik*, Volume 1 (3rd edition, 1907), reprinted, Johnson Reprint Corporation, New York, 1965.

6) G. Chakravarti, *On the earliest Hindu methods of quadratures*, J. Dept. Letters, Univ. of Calcutta, 24 (1934), 23-28.

7) B. Datta, *The Science of the Śulba*, Calcutta University, 1932 (reprinted : 1991).

8) K. D. Dvivedi, *The Essence of the Vedas*, Vishva Bharati Research Institute, Gyanpur (Varanasi), 1990.

9) R. C. Gupta, *Bhāskara I's approximation to sine*, Indian J. Hist. Sci. 2 (1967), 121-136.

10) R. C. Gupta, *Āryabhaṭa I's value of π*, Math. Edu. (Siwan) 7 (1973), Sec. B, 17-20.

11) R. C. Gupta, *Some ancient values of pi and their use in India*, Math. Edu. (Siwan) 9 (1975), Sec. B, 1-5.

12) R. C. Gupta, *Mādhava's and other medieval Indian values of pi*, Math. Edu. (Siwan) 9 (1975), Sec. B, 45-48.

13) R. C. Gupta, *Circumference of the Jambūdvīpa in Jaina cosmography*, Indian J. Hist. Sci. 10 (1975), 38-46.

14) R. C. Gupta, *Lindemann's discovery of the transcendence of π: A centenary tribute*, Gaṇita Bhāratī 4 (1982), 102-108.

15) R. C. Gupta, *On some ancient and medieval methods of approximating quadratic surds*, Gaṇita Bhāratī 7 (1985), 13-22.

16) R. C. Gupta, *On derivation of Bhāskara I's formula for the sine*, Gaṇita Bhāratī 8 (1986), 39-41 .

17) R. C. Gupta, *Mādhavacandra's and other octagonal derivations of the Jaina value $\pi=\sqrt{10}$*, Indian J. Hist. Sci. 21 (1986), 131-139.

18) R. C. Gupta, *Ancient India's contribution to mathematics*, Bulletin of International Council on Mathematics in Developing Countries 1 (1987), 7-18.

19) R. C. Gupta, *Indian mathematical sciences abroad during pre-modern times*, Indian J. Hist. Sci. 22 (1987), 240-246.

20) R. C. Gupta, *The Jaina value of pi and its transmission abroad*, Arhat Vacana 1 (1988), 15-18.

21) R. C. Gupta, *On the values of π from the Bible*, Gaṇita Bhāratī 10 (1988), 51-58.

22) R. C. Gupta, *New Indian values of π from Mānava Śulbasūtra*, Centaurus 31 (1988), 114-126.

23) R. C. Gupta, *A few remarks concerning certain values of π in ancient India*, Gaṇita Bhāratī 12 (1990), 33-38.

24) R. C. Gupta, *The value of π in the Mahābhārata*, Gaṇita Bhārati 12 (1990), 45-47.

25) R. C. Gupta, *Popularity of the Jaina value $\pi = \sqrt{10}$ in China and Japan*, Arhat Vacana 4 (1992), I-5.

26) R. C. Gupta, *On the remainder term in the Mādhava-Leibniz's series*, Gaṇita Bhāratī 14 (1992), 68-71 .

27) R. C. Gupta, *Sundarāraja's improvements of Vedic circle-square conversions*, Indian J. Hist. Sci. 28 (1993), 81-101.

28) T. Hayashi, T. Kusuba and M. Yano, *Indian values for π derived from Āryabhaṭa's value*, Historia Scientiarum No. 37 (1989), 1-16.

29) T. Hayashi, T. Kusuba and M. Yano, *The correction of the Mādhava series for the circumference of a circie*, Centaurus 33 (1990), 149-174.

30) T. Hayashi, *A note on Bhāskara I's rational approximation to sine,* Historia Scientiarum No. 42 (1991), 45-48.

31) T. Hayashi, *The mathematical section of the Nāradapurāṇa*. Indo-lranian Journal 36 (1993), 1-28.

32) E. W. Hobson, *Squaring the circle and other Monographs* (1913), reprinted, Chelsea, New York, 1969.

33) R. C. Jain and C. P. Patni (ed.), *Trilokasāra with the Sanskrit Commentary of Mādavacandra and Hindi Commentary of Āryikā Viśuddhamatī*, Shri Mahavirji (Rajasthan), 1975.

34) H. R. Kapadia (ed.), *Gaṇitatilaka by Śrīpati with the Commentary of Siṃhatilaka Sūri*, Baroda Oriental Institute, 1937.

35) G. S. Nene and A. S. Dogra (ed.), *Kātyāyana Śulbasūtra with the Commentaries of Karka and Mahīdhara*, Benares, 1936.

36) O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Harper, New York, 1962.

37) S. Parameswaran, *Putumana Somayāji*, Gaṇita Bhāratī 14 (1992) 37-44.

38) Kim Plofker, *How to appreciate Indian techniques for deriving mathematical formulas?* In : Catherine Goldstein (ed.), et al., L'Europe mathématique : histoires, mythes, identités. Issu d'un colloque-satellite du Congrés Européen de Mathématiques, Paris, France, du 3 au 6 avril 1992. Paris(1996), 53-65.

39) S. Ramanujan, *Squaring the circle*, Journal of Indian Mathematical Society 15 (1913), p. 132.

40) S. B. Rao, *Indian Mathematics and Astronomy (some landmarks)*, Jnana Deep Publications, Bangalore, 1994.

41) S. N. Sen and A. K. Bag (ed. and transl.), *The Śulbasūtras*, Indian National Science Academy, New Delhi, 1983.

42) K. S. Shukla and K.V. Sarma (ed. and transl.), *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*, Indian National Science Academy, New Delhi, 1976.

43) S. L. Singh, *Vedic geometry*, J. Natur. Phys. Sci. 5-8 (1991-1994), 75-82.

44) D. Srinivasachar and V. S. Narasimhachar (ed.), *Āpastamba Śulbasūtra with Commentaries of Kapardi, Karavinda and Sundararāja*, Mysore, 1933.

論　説

加悦俊興と佐久間纘のかかわりについて

法井八夫・王　青翔

はじめに

加悦俊興は，通称を伝一郎と，号を卵殻といい，長崎の人。幼いころから数学を好み，のちに法道寺和十郎に和算を学び，嘉永５年（1852）に『算法円理括嚢』を完成したといわれている。だが，日本数学史界においては，長い間，加悦俊興に関して，二つの疑問が持たれている。つまり，

a）加悦俊興は歴史上実在の人物であるか？

b）もし加悦俊興が実在の人物であったとしたら，彼はほんとうに『算法円理括嚢』のようなレベル高い算書を著す能力をもっていたか？

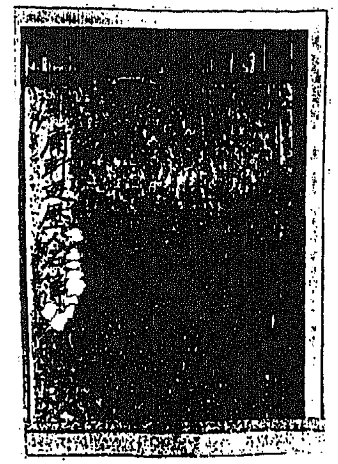
である。

たとえば，三上義夫は，加悦俊興の『算法円理括嚢』が実際に彼の先生法道寺和十郎が書いたものだと指摘している[1]。

本論文の共著者の一人の王青翔は，1987年の「漢字文化圏と近隣諸国の数学史・数学教育国際シンポジウム」にて，「加悦俊興の『算法円理括嚢』と法道寺和十郎について」という講演の中で，比較方法をもって，加悦俊興が歴史上実在の人物であり，主に彼の師の法道寺和十郎から影響を受け，法道寺和十郎の助力をえて，『算法円理括嚢』を書いたと結論を出した。この論文は1988年に『数学史研究』（通巻119号，1988年10月～12月）に公表されたあと[2]，何人かの日本数学史家から，加悦俊興に関する新しく発見された資料，および王青翔の論文に対するコメントをいただいた。ここで，その新しい資料などを公表する。

Ⅰ　加悦俊興について

佐久間纘の生家（現在の福島県田村郡船引町大字石森字戸屋140）に現存する『庸軒遊歴人名簿』に庸軒（纘）が歴訪した人名が載っている[3]。その中に「肥前長崎出来大工町，加悦伝一郎　俊興　印」の名がある。これによって，加悦俊興は実在の人物であることがわかる」[4]。



佐久間纘は九州天草方面への算術修行の旅日記（現存）には「生家を安政５年（1858）９月27日六ツ半時出立し，安政６年２月29日夕五ツ時着」と記録されている[5]。このとき佐久間は40歳か，41歳であった。このことからして，このころ，加悦俊興は健在であったこともわかる。

Ⅱ　稲荷神社に現存している算額について

さて，王青翔の「加悦俊興の『算法円理括嚢』と法道寺和十郎について」（『数学史研究』通巻119号，1988年10月～12月）における（四）の「問３」（加悦）と「問４」（法道寺）についての算額（明治24年４月）が，福島県福島市立子山の稲荷神社に現存している。これは丹治重治（しげはる，佐久間纘の門人ではないが，友人の間柄）と佐久間纘の門人21名による22題の大算額である。その中の第14問は王青翔が挙げた「問3」（加悦）と同じものである。

この大算額は大分新しいが，この関係について考えてみる。

法道寺和十郎は慶応2年（1866）に福島県に来遊したとき，佐久間纘（48歳）や丹治重治（31歳，福島市金沢の人）に「円理豁術」などを教授している[6]。

稲荷神社の算額は，丹治重治が初問（円内容八円術）で，第14問は半澤子之吉となっている。

どうして同じ題がこの算額に掲げられたのかについて，次のいくつかの理由が考えられるのではないか。

その１は丹治は法道寺によって直接「問３」を学んだ。

その２は丹治は法道寺によって直接「問４」を学んだ。

その３は丹治は加悦の『算法円理括嚢』をどこかで知っていた。

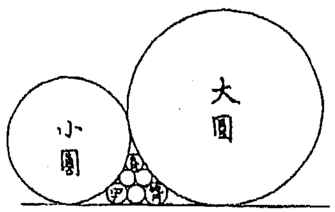
その４は佐久間纘が安政５年の旅で，加悦に出会っていた。その時点において，佐久間

は加悦の『算法円理括嚢』を紹介され，それを，後に佐久間が丹冶に紹介した。

上述の四つの場合がどれにあてはまるかは速断できないが，同じ問題が東北の福島の地に算額として掲げられていることから考えると，その１かその２によると判断することは早計であろうか[7]。

Ⅲ　稲荷神社の算額における第14問について

問題



今有如図線，上戴大小二円，其交繊容不等六円。大円径若干，小円径若干，問得甲乙丙円径術如何。

答曰，如左術。

術曰，置五分，開平方，加一個，名定。以大小径除小太径，開平方，乗定，加一個，自之，以降小大径，得乙甲径。大小径相乗，開平方，倍之，加定，因大小径和，乗定，以降大径，因小径，得丙径，合問。

	信夫郡金沢	半澤子之吉	
明治二十四年四月吉辰	信夫郡浅川	菅野徳右エ門	謹写
	安達郡沼袋	菅野　与市	謹書

この術文は現代式で表すと次のようになる[8]。

$\sqrt{0.5}+1\ (=\frac{2+\sqrt{2}}{2})$ ＝定とおくと，

$$(\text{大径})\div\left(\sqrt{\frac{\text{大径}}{\text{小径}}}\cdot\text{定}+1\right)^2=\text{甲径}$$

$$(\text{小径})\div\left(\sqrt{\frac{\text{小径}}{\text{大径}}}\cdot\text{定}+1\right)^2=\text{乙径}$$

$$\frac{(\text{大径})\times(\text{小径})}{\text{定}\times\{2\sqrt{\text{大径}\times\text{小径}}+(\text{大径}\times\text{小径})\times\text{定}\}}=\text{丙径}$$

が求められる。

むすび

加悦俊興は和算家としてはよく知られていなく，彼に書かれた和算書は『算法円理括嚢』だけである。だが，彼は稀に中国で諸司宝に編纂された数学者天文学者人名辞典『疇人伝』(1886) に収められた和算家である。彼の友人の郁上国輝は『算法円理括嚢』について，『算

法円理括嚢』にある問題が精妙で難しく，正式に彼の門に入って教わらなければうまく解けないと評価している。

（平成10年５月２日受理）

文献と注釈

１）三上義夫「法道寺善の観新考算変について（三)」，藤井貞雄編『法道寺善の算変法』(私家版，昭和62）所収。三上のこの論文は最初に広島の郷土史研究誌『飽薇』第六巻第四号（昭和５年）に発表された。
２）王青翔「加悦俊興の『算法円理括嚢』と法道寺和十郎について」(『数学史研究』通巻119号，1988年10月～12月）pp. 9～16。
３）佐久間纘について，佐藤健一『和算家の旅日記』(時事通信社，昭和63),『日本人と数　江戸庶民の数学』(東洋書店，1994）を参照のこと。
４）『庸軒遊歴人名簿』にある加悦に関する資料は法井八夫と長沢一松氏が提供したもので，関連の写真は長沢一松氏が提供したものである。また，長沢一松氏が佐久間纘の「纘 j の読み方も教えてくださった。
５）佐久間纘の『算法起源集』は中国にも伝わっていた。
６）法道寺善について，藤井貞雄編『法道寺善の算変法』(私家版，昭和62）を参照のこと。
７）「問題３」と同題が稲荷神社の算額に掲げられた理由については法井八夫のコメントによったものである。
８）この解釈は法井八夫によったものである。

図　書

『例題で知る 日本の数学と算額』 付：全国算額一覧

深川英俊著　森北出版　定価（本体2800円＋税）　1998年２月20日発行

数学は，どこの文明国でも盛んに学習され，研究されていた。日本もその一つである。特に江戸時代の日本の数学には特徴がある。それを言葉であげると,「算額奉納」「遺題継承」「遊歴算家」である。飛鳥時代に中国から伝わった数学は，生活数学ばかりでなく，理論数学にも及ぶ数学書であった。そのうち人が生活するために必要なものが，次の時代へと引き継がれた。室町時代に輸入された計算道具「そろばん」の普及とともに，1600年頃から急速に数学が注目される。この生活数学の中に「遺題」という答のない問題が出現し，しかもそれが流行して数学も発達し始めた。次々と新しい算法が工夫され，日本独自の形に形成された。また少し遅れて算額という数学の絵馬が日本中至る所の神社仏閣に掲げられ，流行した。これは広い地域にずいぶん長い間続いた。明治時代や大正時代に奉納された算額が今でも多く残っている。

幕末には，力のある数学者が旅をしながら数学を教えることが増えた。この人達を「遊歴算家」という。遊歴算家の出現により，全国に数学の情報を伝えることが出来て，数学のレベルの向上と普及に貢献した。

江戸時代の数学の特徴の一つ「算額」について，長い間研究している深川英俊氏がこの程『例題で知る 日本の数学と算額』を森北出版から刊行した。全体を３章に分け，初めの章が「和算の歴史を見てみよう」で，奈良時代から明治時代の和算の衰退まで述べている。見出しからは，よくある数学史の入門書のイメージを抱くが，中を開けて読むと，例題があって，その解説が詳しく述べられている。使われている文献も適当でおもしろい。今まであまりなかった作り方である。算法や和算書の解説もわかりやすい。この種の本は珍しく，和算の教科書として使えるようになっている。

第２章は「算額について」である。先ず，算額というものの説明，続いて算額を記録した和算書について簡単な解説がある。このなかで「少年の掲げた算額」の問題と解説が詳しい。これらの問題は，現在の中学や高校の数学の授業でも使えるのが有り難い。

問題よりもおもしろいのが「算額で論争というより泥試合」で,『北野算経』(文化９年，1812年）からの訳（？）である。

第３章は全国算額一覧で，現存するもの，文献によるものに分けて都道府県別に一覧表

になっている。これは，今後算額を見学する際には便利である。よくまとめられた本である，という印象を持つ。ただし，内容の分類が少しわかりにくい。和算の内容の項目立てが，現在の数学の内容と一致しないからかもしれない。

深川氏は日本数学史学会の会員であるが，以前は運営委員も長く努めておられ，算額の研究も「数学史研究」に多く投稿されていた。『日本の数学 何題解けますか？』で一般によく知られている。

（佐藤健一）

編集後記

原稿をお待ちしております。ふるってご投稿下さい。短いものでも結構です。図版や表など、写植に特別な手間が必要な原稿については、印刷費の一部を負担していただく場合があります。何とぞご了承下さい。

（西田　知己）

日本数学史学会　　年 会 費　10,000円
　　　　　　　　　郵便振替　00120-6-20022
新規お申し込みの方は，日本数学史学会事務局または研成社へお問い合わせください。

数学史研究

通 巻　157号（1998年4月～6月）
編集発行　日本数学史学会
〒192-0001 東京都八王子市戸吹町1100
明治大学付属中野八王子高校内　佐藤健一
TEL　0426-91-0321
FAX　0426-91-0988

発 売　㈱研成社
〒103-0014 東京都中央区日本橋蛎殻町1-6-4
電話03-3669-1828㈹／FAX03-3669-1850

ISSN 0386-9555

SŪGAKUSHI KENKYŪ

JOURNAL OF HISTORY OF MATHEMATICS, JAPAN

No. 157

APRIL-JUNE, 1998

CONTENTS

Edited and Published by

The History of Mathematics Society of Japan

数学史研究　（通巻157号）平成10年６月25日

定価2,500円（本体2,381円）