ISSN 0386-9555

数学史研究

（通巻159号）

1998年10月～12月

目　　次

発行・日本数学史学会

発売・研成社

論　説

『塵劫記』における壷の容積計算

林　隆夫

周知のように吉田光由著『塵劫記』（漢文序寛永４年、AD 1627）の壷の容積計算は版による異同が多い。山崎與右衛門氏は『塵劫記の研究・図録編』(森北出版、1965）の「附塵劫記各版の条目の異同」p.86、「附表　万づに升目つもる事の取扱　問題の順序と異同一覧」において、寛永年間の主要な版６種における壷の容積計算の結果の異同を列挙して、「つぼの容量の計算法がそれぞれ違っているのは注目を要す」と指摘しておられる。しかしそこでは、一覧表という制約のためか、それらの結果の違いがどのような計算法の違いによって生じてきたのかという説明はない。また壷の容積計算に対してはどの版でもそれに先だって数値データを伴う壷の図が置かれているが、それらの図に対する言及もない。

山崎氏も承知しておられたに違いないが、これらの図は壷の項目にとって補助的なものではなく、問題の陳述（出題）に相当する重要な要素である。つまり、『塵劫記』の他の多くの項目がそうであるように、壷の項目も「出題＋解答＋計算法」という中国伝来のスタイルを踏襲しており、この「出題」が図によってなされている、と考えられる（出題としての図は同書「俵すぎざんの事」や「検地の事」でも見られる)。上述の計算法の違いが出題の相違に起因する可能性もあるから、我々は図を軽視することはできない。

また戸谷清一氏は「寛永20年版塵劫記の著作に関しての一つの疑問」(『数学史研究』No.150、1996、22—23）において、寛永20年版の壷の計算と寛永４年版のそれを比較検討し、「後の版で誤った解に書き換えて出版した結果になっている。なぜこのような不可解なことがなされたのか、塵劫記の編集と著者吉田光由に関して何か腑に落ちないものを感じる」と結論しておられる。

そこでここではその間の事情をより詳しく見るために、山崎氏が取り上げたのと同じ次の諸版（3と4は同種）における壷の容積の取り扱いの違いを、解答（計算結果）ではなくむしろ出題（図）と計算法に注目しながら検討してみたい。

1．寛永４年４巻26条本、巻二第十六「ますの法の事　付　万物に升目の積あり」の最後（四角錐の問題）から２問目：山崎、前掲書 p.43。

2．刊年未詳５巻本（杉田本）、巻四第二十九「ます目積もる事」の最後（四角錐の問題）から２問目：山崎、前掲書 p.162。

3．寛永８年大型３巻本、巻中第二十六「よろずに桝目積る事」の最後の問題（直前は四角錐の問題）：a、山崎、前掲所 p.186；b, 塵劫記刊行三百五十年記念顕彰事業実行委員会による復刻、大阪教育図書、1977。

4．寛永11年大型３巻本、中巻第二十六「萬に升目積る事」の最後の問題（直前は四角錐の問題）：与謝野寛他編、『日本古典全集・古代数学集』、日本古典全集刊行会、1927、上巻、p.130。

5．寛永11年小型４巻本、第三巻十七「つほに舛目入つもりの事」。ここでは４種の「壷」の第３番目として取り上げられる：a、山崎、前掲書 p.228；b、勝見英一朗校注、『江戸初期和算選書』第一巻、研成社、1990、第３部 p.118。

6．寛永18年小型３巻本『新篇塵劫記』（遺題本）、巻中「万つ升目積」の10―13番目の４題は寛永11年小型４巻本の巻三第十七「つほに舛目入つもりの事」に相当。そのうち、第１、２、４番目の問題の計算は寛永11年小型４巻本と同じ（第４番目では誤記の「五勺」も受け継ぐ）：山崎、前掲書 pp.264―265。

7．寛永20年版西村本、巻二第七「よろず角成物に升目つもる事」の最後の問題：大矢真一校注、岩波文庫、1977、p.150。

これらのテクストの比較検討から、寛永年間の諸版における壷の問題の取り扱いには年代順に少なくとも次の５つの段階、A、B、C、D、Eがあることがわかる（番号は上でとりあげた版の順番）。記号法は図１参照。

A：１と２

図：平たい円筒形の口と円錐台形の本体部分をもつ壷で、その丸みを帯びた底に円錐状の「とかり（尖り）」がつく。全体を輪郭線で示す。尖りは壷の実体とは無関係な補助線

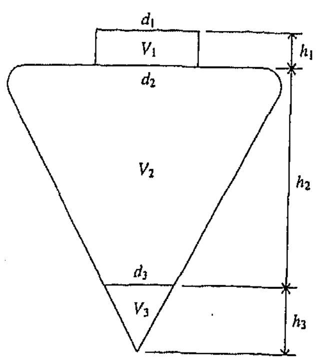


図１　記　号

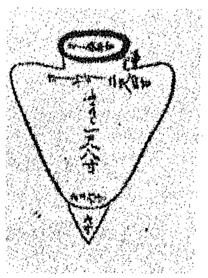


図２　寛永４年４巻26条本（No.1）

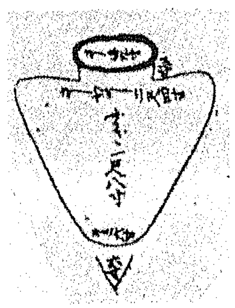


図３　刊年未詳５巻本（No.2）

の類であろう。２では尖りのみが書き換えられ、本体部分から若干離されている。図２、３参照。

図中に与えられた数値：h_1 ＝３寸、d_1 ＝９寸、h_2 ＝18寸、d_2 ＝24寸、h_3 ＝６寸、d_3 ＝６寸、口の差し渡し（d_1）と上部差し渡し（d_2）に対してはそれぞれ「さし渡」、「さしわたし」という語が、また壷の実質的深さ（h_2）に対しては「ふかさ」という語が添えられている。

計算：円柱の体積（V_1）と円錐台の体積（V_2）(〈　〉内は私が補った数値)。

$V_1 = d_1^2 \times h_1 \times 0.8 \times 16 =$ 〈3.1104≒〉3.11升。

$V_2 + V_3 = d_2^2 \times (h_2 + h_3) \times 0.33 \times 0.8 \times 16 =$〈58.392576≒〉58.4升。

$V_3 = d_3^2 \times h_3 \times 0.33 \times 0.8 \times 16 =$〈0.912384≒〉0.91升。

$V = V_1 + (V_2 + V_3) - V_3 = 60.6$升。

テクストは最終結果を「残て六斗六合としる也」と表現する。ここでは、３で割る代わりに0.33を掛ける。定数0.8は本条の前の部分で用いられている「まるき法七九（0.79＝π／4）」の近似値である。また16は「（古）ます法」と呼ばれるが、これは「古舛」の換算率、１立方尺＝１斗６升、による（例えば岩波文庫版、p.144参照）、計算記述中、d_2 を「さしわたし」、h_3 を「そこのとかり」と呼ぶ。

B：３と４

図：若干の変化あり。口と本体は黒塗り。底の尖りは輪郭線。図４、５、６参照。

図中に与えられた数値：Aと同じ。

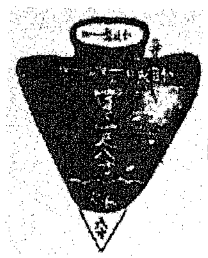


図４　寛永８年大型３巻本（No.3a）

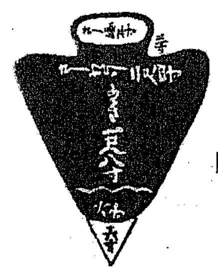


図５　寛永８年大型３巻本（No.3b）

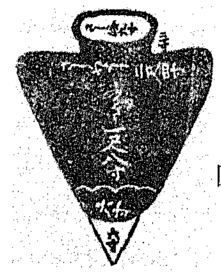


図６　寛永11年大型３巻本（No.4）

計算：定数に若干の変化あり。すなわち、「円法」としては、「七九（0.79）」が用いられ、３による割り算を（0.33を掛けるのではなく）そのまま行う。また計算記述から「さしわたし」の語が消える。

$V_1 = d_1^2 \times h_1 \times 0.79 \times 16 =$〈3.07152≒〉3.07升。

$V_2 + V_3 = d_2^2 \times (h_2 + h_3) \div 3 \times 0.79 \times 16 =$〈58.24512≒〉58.245升。

$V_3 = d_3^2 \times h_3 \times 0.79 \div 3 \times 16 =$〈0.91008≒〉0.91升。

$V = V_1 + (V_2 + V_3) - V_3 = 60.415$升。

与えられた数値で計算すれば、V ＝60.405であるが、テクストは「六斗四合一勺五才

(60.415)」とする。これは、V_3 =0.91という結果を得ながらも、それを引く段階では V_3 =0.9としたからと思われる。

C：5

図：大きな変化あり。輪郭線のみで描かれ、壷の本体部分は尖りとともに、角の丸い細長い逆三角形を成す。図からも「さし渡」「さしわたし」という語が消える。図7、8参照。

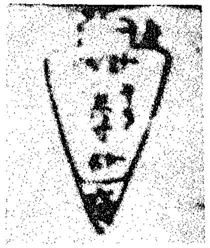


図7　寛永11年小型4巻本（No.5a）

図8　寛永11年小型4巻本（No.5b）

図中に与えられた数値：A、Bと同じ。

計算：Bとほとんど同じだが、最後の計算はBより正確（V =60.405升）。ただし問題冒頭の解の陳述では、「六斗四合（60.4）入（いる）といふ」となっている。

なお、直前と直後の問題でも円錐台形の容器の体積を扱うが、両方とも、上部さしわたしと下部さしわたしの双加平均をさしわたしとする円柱の式で近似する。

D：6

図：全体としてはCに似るが、細部に変化あり、口の輪郭が二重になり、口と本体とのあいだに線が入る。尖りはより尖った状態。口は斜め上から、本体は真横から見た状態を示す。やはり「さし渡」、「さしわたし」という語がない。図9参照。

図中に与えられた数値：口の寸法、h_1、d_1 が消える。他はA、B、Cと同じ。

計算：大きな変化あり。V_1 の計算と0.79を掛けるステップが消える。一方、「さしわたし」という語が復活している（d_3 に対して）。

$V_2+V_3=d_2^2\times(h_2+h_3)\div3=4.608$升。

$V_3=d_3^2\times h_3\div3=0.072$升。

$V=\{(V_2+V_3)-V_3\}\times16=72.576$升。

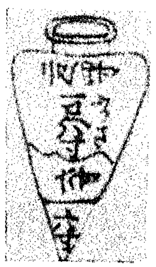


図9　寛永18年小型4巻本（No.6）

なお、「万つ升目積」の条目では角錐台形の容器もいくつか扱うが、すべて、上面と下面の長さの双加平均を長さとし、幅の双加平均を幅とする長方形を断面に持つ四角柱の式で近似する。

E：7

図：Bと同じ。図10参照。

図中に与えられた数値：A、B、Cと同じ。

計算：Dと同じ。

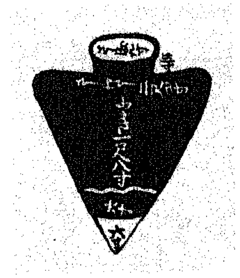


図10　寛永20年版西村本（No.7）

AとBでは、出題（図）にも計算法にも本質的な違いはない。最終結果（V）の違いは、定数と計算手順の細部の違いに起因する。BとCのあいだにも本質的な違いはない。最終結果の違いは、途中結果として採用する値の桁数に起因する。ただしCでは図の形状が大きく変化していることと、図（出題）からも計算法（計算記述）からも「さしわたし」という語が消えていることが注目される。

図の形状の変化は口を除いた部分の縦横比の変化に端的に現れる。どの版でも、問題に与えられた数値は、本体部分の上部さしわたし（d_2）が2尺4寸、本体部分の深さ（h_2）と尖りの深さ（h_3）の和がやはり2尺4寸だから、縦横比は1：1になるはずである。実際に測ってみると、A、特に1の図はその比が厳密に守られていることがわかる。Bでもほぼそれに近い比が保たれるが、Cになるとまったく変わる。この変化が単なる無頓着によるものか、あるいは何らかの意図によるものかは不明。表1は、それぞれの版で描かれた図におけるその比の値を示す。

表1　諸版における壷の図の縦横比

分類	A		B			C		D	E
版	1	2	3a	3b	4	5a	5b	6	7
$(h_2+h_3)/d_2$	1.00	1.02	1.05	1.05	1.04	1.41	1.41	1.49	1.02

D（遺題本）ではその縦横比がさらに増大する。すなわち壷が細長くなる。また、図（出題）から口の寸法が消え、それに伴って計算では口の容積計算が消える。つまり、出題が

変わったので計算も変わっている。この変化は最終結果をCの場合より小さくするはずであるが実際は大きくなっている。その理由は、もう一つの変化、すなわち本体の容積計算で乗数0.79（＝π／4）が消えていることにある。Dの計算自体は数値的に首尾一貫しているので、これは版下を書く段階で発生するエラーの類ではない。一つの可能性は著者自身の計算ミス（0.79の掛け忘れ）であるが、口の場合と同様、出題の変化に起因する計算の変化である可能性も考えられる。

第一の可能性（計算ミス）を支持するのは、計算記述中に用いられている「そこのさしわたし」(d_3を指す）という語である。ふつう「さしわたし」は円の直径を意味するから、著者はここで丸いものを扱っている、しかし0.79を掛け忘れた、とみなすのは一見自然に見える。しかし、Dは著者が自信を持って世に問うた『新篇塵劫記』である。上巻と中巻の前書きでは、『塵劫記』出版から十数年で早くも現れた海賊版の欠陥を指摘している。また下巻末には他の数学者たちへの挑戦とも言える12問の「遺題」を含む。そのような著作で著者ははたして0.79を掛け忘れるというような初歩的なミスを見逃すだろうか。私はここで、計算と図（出題）との関係を重視するという立場から、第二の可能性（出題の変化）を検討してみたい。

まず、Dで行われている計算はそれ自体無意味ではなく、d_2、d_3を正方形の辺の長さ、(V_2+V_3)、V_3を四角錐の体積、Vを角錐台の体積と考えれば正しい。またDの図（出題）では、口の寸法が消えると同時に、口と本体とのあいだに線が入り、さらに、両者を見る視点が異なる（図９参照）。このことは、口が本体から切り離され、計算の対象ではなくなったことを示すと同時に、形の上でも口と本体が一続きのものではないこと、つまり口が丸いからといって本体部分が丸いとは限らないこと、を暗示する。そして真横から見たその本体部分は上に開いた肩の丸い台形で表現されている。その上、図には「さし渡」「さしわたし」という語もない。したがって、Dの図の本体部分は、角錐台を横から捉えた図と見ることも可能である。

確かにDの計算記述で用いられている「そこ（底）のさしわたし」という語は角錐台の可能性を一見否定するかのように見える。しかし壷がもしふつうに丸く型どられた後でまだ柔かいうちに四方から平らな板で圧迫されてできるような形をしていたらどうだろうか。その場合、胴体の水平断面は角に丸みを帯びた正方形であるが、上面と底面はほとんど原形（円）を保っているから、その底面の大きさを表現する場合、確かに正方形の場合に用いられる「ひろさ」という語（例えば岩波文庫本『塵劫記』p.144参照）より「さしわたし」の方がふさわしい。一方胴体は、角が丸いとはいえ全体として四角張っているから、円錐台の計算法より角錐台の計算法の方が真の体積に近い結果をもたらす、と考えるのは自然である。

このような形の壷はあまり一般的ではないが実在する。例えば、金沢大学資料館所蔵暁烏敏コレクション（全753点）のNo.120「瀬戸焼四角壷」(図11、制作者制作年代未詳）がそれである（同コレクションのカラー画像がインターネット上で公開されている：http://web.kanazawa-u.ac.jp/~shiryo/)。

図11　瀬戸焼四角壷（金沢大学資料館所蔵）

以上の考察から、私は第二の可能性（出題の変化）も十分あり得ると考える。しかしその場合、円錐台の問題を角錐台の問題に変えた著者の意図はまだ説明できない。また、図の縦横比と与えられた数値との違いをCのみならずDにおいても放置した（いやむしろ拡大した）のはなぜか、疑問は残る。

EはBとDの混合である。つまり、図（出題）にはBのそれを採用し、計算法にはDのそれを採用している。C、Dの図を捨てBの図を採用したのは縦横比を是正するためであろう。しかしそれは、計算で用いられない口の寸法を図（出題）に残すというちぐはぐな結果を招いてしまった。Eは書肆版であるから、この齟齬は著者の責任ではないかもしれないが。

以上、『塵劫記』寛永20年版にいたるまでの主要な版における壷の容積の取り扱いの違いについて検討し、その変遷の跡づけを試みた。この試みが、入子算やまま子立の挿し絵のように（山崎、前掲書p.10参照)、各種版本を比較分類する上でいくらか役に立てば幸いである。

謝辞。壷の図の転載を快く承諾してくださった森北出版株式会社（図２、３、４、７、９)、大阪教育図書株式会社（図５)、研成社（図８)、岩波書店（図10）に深く感謝します。また、瀬戸焼四角壷（図11）に関しては、金沢大学資料館から同館長宮下孝晴さん撮影の写真を掲載する許可をいただき、同館の在田則子さんから暁烏敏コレクションに関してご教示い

ただきました。心から謝意を表します。

（平成10年10月16日受理）

論　説

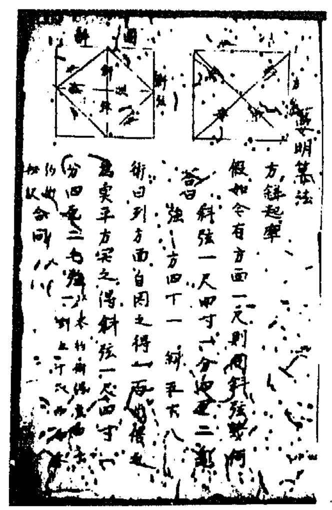
皆川家本『規矩要明算法』と『算法諸率根源記』

野口泰助・川瀬正臣

神奈川県内の数学史資料探究のため、高座郡寒川町の町史編纂課をお尋ねした時のこと、教育委員会保管の皆川邦直氏寄託文書目録『皆川邦直家文書寒川町史資料所在目録第８集』平成５年２月寒川町発行を拝見することができた。この目録の171頁から173頁に和算関係の資料36点があり、整理番号2452の『算□之法』に関孝和編とあり、『算脱之法』と推測ができた。他にも関孝和の著書と思われるものが多く含まれていた。特に『規矩要明算法』と記載されているところから、ぜひ原本を拝見したいと思い、早速、寄託者の皆川邦直氏に閲覧許可をお願いいたしましたところ、快く御承諾を頂き、平成10年３月９日に野口泰助と川瀬正臣の二名で調査に出向いた。

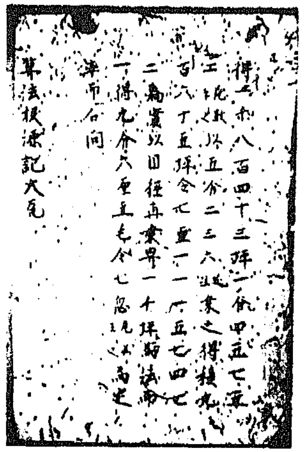
寄託されていた資料は一点づつ袋に納められ整理され、段ボール箱に納められていた。原資料は湿気のため板状に貼り固まり、更に虫蝕で蜂巣のように穴が空き、解読困難の状態であった。一枚づつ丁寧に開いては見たものの著者・筆者・旧式使用者も殆ど知り得なかった。幸い書名だけは目録で整理されていたので、それに従って調査を進めた。

『規矩要明算法』は高橋織之助編の『算話拾穫集』の関孝和先生伝書中に見られる。また関孝和の著として『関孝和全集』にも集録されている。



しかし、この書に収録されている『規矩要明算法』は東北大学本と日本学士院本との合製本であり、完全とは言い切れない。それ故、皆川家本は第三番目の発見とも言うべき書となることから、既存のものと比較できたらと希望を持って着手した。

集録本では「方斜起率」の末部に「…以零約術　円周起」とあるところが、皆川家本では「…以零約術得　方四十一斜五十八而已零約術秘訣」とあり、$\sqrt{2} \fallingdotseq \frac{58}{41} = 1.414634$と近似値を示している。前者は第一問で既に略され、円周率に飛んでいるが、これを見ただけでも全文を記録に残す必要を感じた。



『関孝和全集』に集録されている『規矩要明算法』の解題の部分に「この二ヶ条諸法根源記有之故相除申候」…「諸法算法根源記も恐らく孝和の著書であろうと考えられるが失われた」とある。皆川家文庫中に『算法諸率根源記』という写本が含まれており、巻末に「算法根源記　大尾」とあるところから、この書は『諸法算法根源記』の写本と思われ、新発見の貴重書であるといえる。

『関孝和全集』の「規矩要明算法の解説」には

> 諸法算法根源記は規矩要明算法より前のものであろう。規矩要明算法には「天元」の二文字は使われていない。天元術や楊輝算法の数字係数方程式の解法は理解していないようである。

とある。確かに、皆川家本『規矩要明算法』にも「天元」の二文字は使われていないが、『算法諸率根源記』の「求三・五・七・八・九・十角率術」の各術文や「求蕎麦形率術」及び「求方切篭率術」「求円切篭率術」等の各術文には「術日立天元一為…」とあるところから、関孝和は天元術をマスターしていたことがわかる。

円周率の計算では『関孝和全集』の「規矩要明算法の解題」に

> 環矩術の計算は…『算爼』の計算をやり直したものである。算爼と同じく三万二千七百六十八角形まで計算しているが、算爼とは違っている。

とあり、集録本には四角形から三万二千七百六十八（2^{15}）角形までの円周率の計算がなされているが、皆川家本『規矩要明算法』には

> 術日円径一尺内如図容四角次八角次第如此至一十三萬一千零七十二角而依環矩術而得径一之定周 委諸率有根元

とあり、それぞれの数値は略されている。しかし『算法諸率根源記』には

> 六萬五千五百三十六（2^{16}）角形の周
> 三尺一四一五九二六五二三八六五九一三五七一
> 一十三万一千令七十二（2^{17}）角形の周
> 三尺一四一五九一（ママ）六五三二八八九九二七七五九微強

と『算爼』とまったく同じ方法で求め、『算爼』の円周率を更に高めようとした証が記されているが、『関孝和全集』の『規矩要明算法』には『算爼』と同じ32768（2^{15}）角形までしか円周率が記載されていない。これは2^{17}角形の円周率の精度に疑問を抱いていたのではないかと思われる。このようなことは、関孝和自身がこの書にタッチしていなかったことを意味するものである。

円周率の計算が2^{17}角形で終わっているのは、2^{18}角形の円周率はほぼ2^{17}角形と同値で意味がなく、2^{19}角形は計算不可能となることから円周率を求めるには2^{17}角形が最終角形となってくる。

皆川家本『規矩要明算法』と『算法諸率根源記』の両書に記されている孤矢弦術の公式　弦^2＋ａ矢^2＝孤^2　について、磯村吉徳は著書『算法闕疑抄』で「この係数は孤が半円の場合は成り立つが半円でない場合は符合せず」また「これについては口伝あり」としている。確かに半円の場合は　$a=\pi^2-4$　となり、$\pi=3.14$　とすると　$a=5.8596$　となる。因みに、磯村吉徳は2^{17}角形から　$\pi=3.1416$　を導きだし、　$a=5.86965056$　としている。

関孝和は『闕疑抄之答術』を編じており、当然「半円でない場合は符合しない」ことは理解していた。しかし『規矩要明算法』『算法諸率根源記』とも設問は明らかに半円ではない。関孝和が何故「符合しない」場合を敢えて設問に選んだのか、また「半円でない場合は口伝あり」と注を記さなかったのか疑問が残る。

また、関孝和は求玉順積術で$\pi=3.1416$を使用しているのに、孤矢弦術では何故か精度を落とした値を使用している。

関孝和が磯村吉徳と同一の公式を用いたのは両者の師が高原吉種であることに起因していると思われる。

そして、両者とも「円周率の計算」などは『算爼』の影響をかなり強く受けている（『算爼』は$a=5.8609$を使用）。

関流和算が確立されていない当時は門弟達は市販されていた和算書『算爼』や『闕疑抄』などを中心として学習していたと思われる。したがって、『闕疑抄之答術』も関の門弟が学習したものを関孝和編として記録に残したのではなかろうか。

集録本と皆川家本とでは内容が若干異なっており、皆川本『規矩要明算法』は設問・術文ともに集録本よりわかりやすい内容及び表現になっている。そして、『算法諸率根源記』は『規矩要明算法』を学ぶための書となっている。

集録本の解説には「孝和の諸法算法根源記は入門書として規矩要明算法の前半をなすものであろう」と推測しているが、皆川家本の『規矩要明算法』と『算法諸率根記』の内容からして、この推測は正しいといえる。

皆川文庫の調査をしてみて強く感じたことは、『算法諸率根源記』と『規矩要明算法』の二書は関孝和自身の手による著書ではなく、「関流和算の伝書」ではなかったかということである。この二書を関孝和著としたのは『算話拾揮集』のみである。編者の高橋織之助が「関流和算の伝書」を「著書」と勘違いし、記載したことは十分考えられる。もし「関流和算の伝書」であるならば、縷々、上述したような疑問はすべて納得できる。しかし、平山諦氏は著書『関孝和』（恒星社厚生閣）で『規矩要明算法』については、

寛文三、四年孝和が25歳ごろ書いたものだと言う証拠がある。まず目録は、

「方斜起率、環矩術、勾股弦術、歩挟術、双術殳術、径矢弦術、弧矢弦術、立玉貫深渡術、玉順積、渦巻術」

とある。この熟語は孝和の若い時代の頃のものであることは確かである。そしてこの本を孝和が書いたという証拠は、宝永元年（1704）に孝和が自ら書いて宮地新五郎に授けた算法許状の目録の一部と一致する。この許状には、

「環矩之術、径矢弦之術、弧矢弦之術、立玉貫深渡術、立玉積率起術」

などの題目が見える。宝永元年と言えば孝和は大器晩成後のことであるが、この免許状は初歩のものである。

と述べているが『規矩要明算法』が「伝書」であればこの指摘は証拠とはならない。また、平山氏は同書で

青年孝和は「算俎」を手にして、胸を躍らせてこの計算をしたに違いない。これが孝和の一生の仕事になった。没後出版された孝和の『括要算法』にはより正しい価が掲載されてある。

と述べている。これに対し、杉本敏夫氏は「関の求弧背術の限界（予報）」（1986年４月１日記、1995年８月20日補訂）で

その人は自ら計算しなかったことである。もしも計算したならば８角の矢を求めるという連鎖的な計算の早い段階で、誤りが発見できたはずであり、それを訂正せずに、誤りのまま継承することは考えにくい。…この底本（学士院本）はまことに粗略な写本であり、正しく伝えたとは考えられない。

内部を詳細に検討したかぎり少なくとも、「環矩術」の円周率は『算俎』の計算をやり直したものとは到底考えられない、という結果になった。

と反論している。

平山氏の論は『算話拾薄集』に関孝和の著と記載されていることに起因しているのではなかろうか。

皆川家本『規矩要明算法』の「環矩術」の末尾には「定周委諸率有根元」の割註も見え、両書揃って関孝和初期の研究の全貌が知れると思う。

また、『算法諸率根源記』には $\frac{355}{113}$ 等が詳述されている。これ等も今後の研究課題となる貴重な資料であるといえる。

そこで、読みとれる範囲で全文をそのまま収録することにした。しかし、二点とも写本のため誤写もあり、できるだけ原本に忠実にと思い努力したが、不鮮明な部分や欠落もあり完全な復刻に成りきれなかったことをお断りしておく。

尚、皆川家文庫中には、この外にも『算話拾薄集』に見える『算脱并験符』『算法括要』（一部）『拾遺諸約法并翦管術』等が含まれており、関孝和の業績を知る上で貴重な文庫といえる。

本調査にあたり、末筆ながら皆川様と寒川町教育委員会の御世話下さった方々に心から感謝申し上げます。

（平成10年８月11日受理）

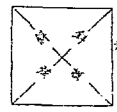
参考文献

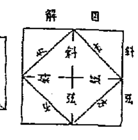
1　皆川邦直氏寄託文書目録
　『皆川邦直家文書寒川町史資料所在目録第８集』平成５年２月　寒川町発行
2　『算話拾薄集』高橋織之助編
3　『算俎』村松茂清著
4　『算法闕疑抄』磯村吉徳著
5　『関孝和全集』平山諦・下平和夫・広瀬秀夫編著　大阪教育図書
6　『関孝和』平山諦著　恒星社厚生閣
7　「関の求弧背術の限界（予報）」
　（1986年４月１日記、1995年８月20日補訂）杉本敏夫著

規矩要明算法

要明算法

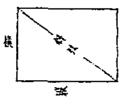
方斜起率





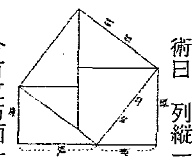
仮如今有方面一尺則問斜弦幾何
答曰　斜弦一尺四寸一分四厘二毛
強　方四十一　斜五十八
術曰　列方面自因之得一百歩倍之為
実平方開之得斜弦一尺四寸一分四厘
二毛強（以零約術得方四十斜五十八而已零約訳秘術）合問

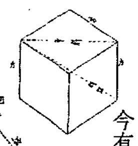
縦横斜術



仮如今横五寸縦一尺則問斜弦幾何
答曰　斜弦一尺一寸一分八厘強
術曰　列縦一尺自因之得数寄左〇列横五寸自因之
得者加入寄位共得一百二十五歩為実
平方開之得斜弦一尺一寸一分八厘強
合問

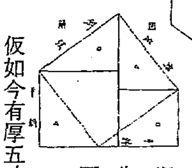
立方斜起率

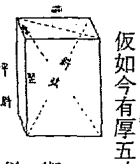




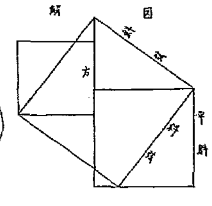
今有立方面一尺則問斜弦幾何
答曰　斜弦一尺七寸三分二厘強
方五十六　斜九十七
術曰　列方面自因之得一百歩三之
為実平方開之得斜弦一尺七寸三分二
厘強（以零約術得百五十六斜九十七而已零約術秘訳）合問

厚幅竪斜術

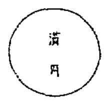


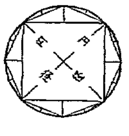


仮如今有厚五寸幅一尺竪一尺則問斜弦幾何
答曰　斜弦一尺五寸
術曰　列竪自乗之得一百歩寄位〇列
併厚冪与幅冪得一百二十五歩（即平斜冪也）
加入寄位得共二百二十五歩為実平方
開之得斜弦一尺五寸合問



環矩術（円周起規曲術）
仮如今有円径一尺則問周幾何
答曰　周三尺一寸四分一六
径一百十三周三百五十五
術曰　円径一尺内如図容四角次八角
次第如此至一十三萬一千零七十二角
而依環矩術而得径一之定周（委諸率有根元）



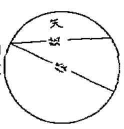


径矢弦術
仮如今円径一尺只云如図切落矢二寸

則問弦幾何
答曰　弦八寸
術曰　列径内減矢余得八内以矢相因之四之得六十
四歩為実平方開之得弦八寸合問

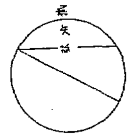
仮如今有円径一尺唯云如図切弦八寸
則問矢幾何
答曰　矢二寸
術曰　列径自因之得一百歩内減弦冪餘得三十六歩
為実平方開之得六寸以減円径余得四寸折半之得矢
二寸合問

仮如今有円闕唯云矢二寸弦八寸則問円満径幾何



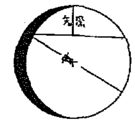
答曰　円満径一尺
術曰　列強自因之得六十四歩為実〇
列矢四之得八寸為法実如法而一得八
寸（即大矢也）加入矢二寸得満径一尺合問

弧矢弦術

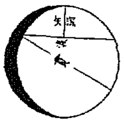


仮如今有円欠唯云弦八寸矢二寸則問
弧幾何
答曰　弧九寸三分五厘零八糸
術曰　列弦八寸自乗之得六十四歩寄位〇列矢自乗
之得四歩以五箇八分五九六（定法）相乗之得二十三歩
四分三厘八毛四糸加入寄位得共八十七歩四分三八
四為実平方開之得弧九寸三分五厘零八糸合問

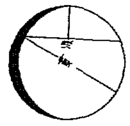
求立玉貫深渡術



仮如今有立玉貫一尺唯云如図切深矢
二寸則問渡幾何
答曰　渡八寸
術曰　列貫一尺内減深矢余得八寸以深矢相因四之
得六十四歩為実平方開之得渡八寸合問

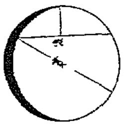


仮如今有玉貫一尺只云如図切渡八寸
則問深矢幾何
答曰　深矢二寸
術曰　列貫一尺自乗之内減渡冪余得
三十六歩為実平方開之得六寸以減貫一尺餘得四寸
折半之得深矢二寸合問



仮如今有立玉只云深矢二寸渡八寸則問玉貫幾何
答曰　貫一尺
術曰　列渡八寸自之得六十四歩為実
〇列深矢二寸四之得八寸為法実如法
而一得八（大也）加入深矢二寸得玉貫

一尺合問



玉順積術
仮如今有立玉貫一尺五寸則問皮積幾
何
答曰　七百零六歩八分六厘
術曰　列貫四之得六尺以貫相乗之得九百歩零七分
八五四（円法）乗之得皮積七百零六歩八分六厘合問

渦巻術
仮如今有如図糸巻不知其長唯云巻初之中径五分巻
納全径七寸七分巻終六分則問長幾何

答曰　糸長九尺零一分一厘八毛
術曰　列全径七寸七分内減中径　余
得七寸二分以間六分除之得一十二箇加入二箇得共
一十四箇以一十二箇相乗之得一百歩十八以六分乗
之得数以四約之得二尺五寸二分寄位〇列先得一十
四箇半之以中径五分相因得三寸五分加入寄位得共
二尺八寸七分以三箇一分四（円法）相乗之得糸長九尺
令一分一厘八毛合問

仮如今有管笠径一尺六寸深六寸登一尺只云如図縫
間各五分而以糸閉之則問長幾何
答曰　五丈二尺七寸八分三厘四

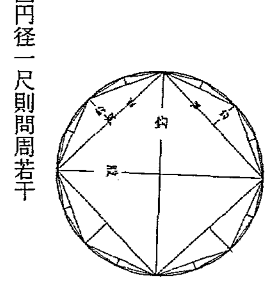
術曰　列径半之得八寸以縫間五分相
因之得四寸以登一尺除之得四分加入
径一尺六寸得共一尺六寸四分折半之
得八寸二分自乗之得六十七歩二分四厘以前四分帰
之得一丈六尺八寸一分以三箇一分四（周法）乗之得共
糸長合問

仮如今有円木一周六尺只云如図以糸六丈四尺巻之
毎巻之延四尺則問巻数幾何
答曰　巻数四搦
術曰列倍糸長得一丈二尺八寸以延四尺除之得三十
二箇為実〇列倍周得一丈二尺以延四尺除之得三箇
加一箇得四箇為従法平方開之得巻数合問

仮如今有円木一末周六尺只云如図以糸六丈四尺
従末四搦巻之則為毎巻延同寸幾何
答曰　毎巻延四尺
術曰　列末周六尺以巻数四相因之得二丈四尺以減
糸長餘得四丈為実〇列巻数四加入一得共五以四因
之得二十折半之為一十為法実如法而一得四尺合問

算法諸率根源記

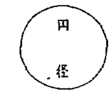
環矩之図



算法諸率根源記

環矩之図

円周図



仮如図円径一尺則問周若干

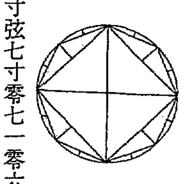
答曰　周三尺一寸四分一厘六毛

径一百一十三

周三百五十五

術曰　円径一尺内如図容四角次容八角次容一十六
角次第如此至一十三万一千零七十二角而以鈎股術
各求弦以角数相乗之而得截周也其術段如左

環矩之図



四角
鈎五寸股五寸弦七寸零七一零六七八一一八六五四
七五二四四　微強
周二尺八寸二八四二七一二四七四六一九零零九七
六　微強

八角
鈎一寸四六四四六六零九四零六七二六二三七八
股三寸五三五五三三九零五九三二七三七六二二　微強
弦三寸八二六八三四三二三六五零八九七七一七　微強
周三尺零六一四六七四五八九二零七一八一七三八　微強

一十六角
鈎三分八零六零二三三七四四三五六六二一九
股一寸九一三四一七一六一八二五四四八八五九　微強
ヒンヤク
弦一寸九五令九令三二二零一六一二八二六七八
ヒキヤイ

周三尺一二一四四五一五二二五八令五二二八五六
ヒンヤク

三十二角
鈎九厘六零七三五九七九八三八四七七五四　微弱（ママ）
股九分七五四五一六一令令八令六四一三三九
弦九分八令一七一四令三二九五六令六令二　微弱
周三尺一三六五四八四九令五四五九三九令（ママ）二六三
八

六十四角
鈎二厘四令七六三六六三九令一五五六九　微弱
股四分九令令八五七令一六四七八令三令一　微弱
弦四分九令六七六七四三二七四一八令一四三　微弱
周三尺一四（ママ）三三一一五六九五四七五二九一二三
微強

百二十八角
鈎六毛令二二七一八九七四一三八令三六　微強
股二分四五三三八三七一六三七令九令令七一
弦二分四五四一二二八五二二九一二二八八　微強
周三尺一四一二七七二五令九三二七七二八六八一
微強

二百五十六角
鈎一毛五令五九令六五一八九七八八九九　微強
股一分二二七令六一四二六一四五六一四四　微強
弦一分二二七一五三八二八五七一九九二六一
周三尺一四一（ママ）四（ママ）一五一三八令一一四三令一令七六　微弱
三三　微弱
三

五百十二角
鈎三糸七六四九令八令四二七七二九五　微強
股六厘一三五七六九一四二八五九九六三　微強
弦六厘一三五八八四六四九一五四四七五四　微弱
周三尺一四一五七二九四令三六七令九一三八四三
微弱

一千令二十四角
鈎九忽四一二三五八六九九四二八七　微弱
股三厘令六七九四二三二四五七七二三七七　微弱
弦三厘令六七九五六七六二一九六五九七六三　微弱
周三尺一四一五八七七二五二七七二一五九七令八
微弱

二千令四十八角
鈎二忽三五三令九五二一一九一四二　微強
股一厘五三三九七八三八一四八二九八八一　微強
弦一厘五三三九八令一八六二八四七六五六　微強
周三尺一四一五九一四二一一五一一一九九九七四
微強

四千令九十六角
鈎五微八八二七四一四九令四五令二（ママ）同
股七毛六六九九令九三一四一二三八二八　微強
弦七毛六六九九令三一八七四二七令四五　微強
周三尺一四一五九二三四五五七令一一七七四二五
微弱

八千一百九十二角
鈎一微四七令六八五五八八九令四一八八　微強
股三毛八三四九五一五九三七一三五二三　微弱
弦三毛八三四九五一八七五七一三九五六　微弱
周三尺一四一五九二五七六五八四八七二六六六八　微弱

一万六千三百八十四角
鈎三繊六七六七一四一令七四四二七四　微強
股一毛九一七四七五九三七八五六九七八　微強（ママ）
弦一毛九一七四七五九七三一令七令三三　微強
周三尺一四一五九九（ママ）一一六三四三三八六二九令八
強

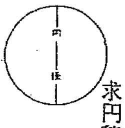
三万二千七百六十八角
鈎九沙一七（ママ）一七八五三五三一　微弱
股九糸五八七三七九八六五五三五一七　微弱
弦九糸五八七三七九九令九五九七七三　微弱
周三尺一四一五九二六四八七七六九八五六七令八
微弱

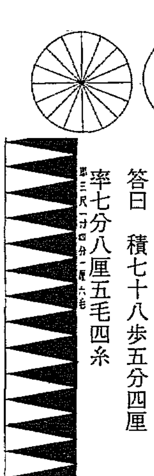
六萬五千五百三十六角
鈎二沙二九七九四六三四三六　微弱
股四糸七九三六八九九五四七九八八七　微弱
弦四糸七九三六八九九六令三令六六九　微弱
周三尺一四一五九二六五二三八六五九一三五七一

一十三万一千令七十二角
鈎五厘七四八（ママ）六五八六二　微弱
股二糸三九六八四四九八令一五三三四　微強
弦二糸三九六八四四九八令八四一八二　微強
周三尺一四一五九一（ママ）六五三三一八八九九二七七五九
微強

依環矩術得径一之定周而以零約術得径一百一十三
周三百五十五而已零約術有内外親疎異口決也

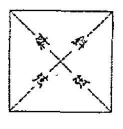
求円積率術





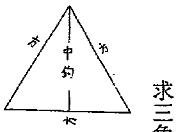
仮如有円径一尺周三尺一寸四分一厘
六毛則問積及率若干
答曰　積七十八歩五分四厘
率七分八厘五毛四糸
術曰　列周三尺一寸四分一厘六毛以径半五寸相因
之得一百五十七歩令八厘折半之得積七十八歩五分
四厘為実以径冪一百歩為法得率七分八五四合問

求方斜率術



仮令有方面一尺則問斜弦若干
答曰　斜一尺四寸一分四厘二毛
方四十一斜五十八
術曰　列方面自之倍之得二百歩為実平方開之得斜
弦一尺四寸一分四二一三五六強而 依零約術得方四十一斜五十八而已口決
也 合問

求三角率術

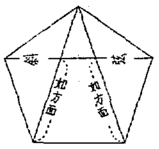


仮如有三角毎面一尺則問中鈎積及定
法各若干
答曰　中鈎八寸六分六厘令二五四
寸積四十三歩三分令一二七（ママ）
術曰　立天元一為中鈎〇一自之為中鈎冪〇〇一四
之為三段方面冪〇〇Ⅲ寄左〇列方面自因之就分三

之得数与寄左相消得開方式丰〇Ⅲ平方開之得中鈎
八寸六分六令二五四微強以方面相乗之得数半之以
方面冪為法而一得定法四分三厘三毛尾数去之為定
法合問

求五角面率術

仮如有五角面毎一尺則問斜弦積及定
法各若干

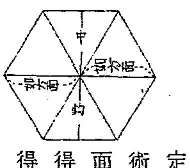


答曰　斜一尺六寸一分八厘零三糸
　三九八八七強
　積一百七十二歩 零四七 七四強
　定法一箇七分二厘

術曰　立天元一為斜弦〇丨自乗之為斜弦冪〇〇丨
内弦方面半餘為因方面斜丅〇丨寄左〇列斜弦以方
面相乗之得数〇丨与寄左相消得開方式丅丅丨平方
飜法開之得斜弦
一尺六寸一分八厘零三糸三九八八七強依是得一百
七十二歩零四厘七七四強為実以方面冪為法而一得
一箇七分二厘尾数去之為定法合問

求六角率術

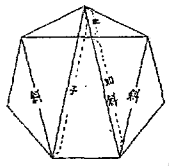
仮如有六角毎面一尺則問中鈎積及定法若干
　中鈎一尺七寸三分二厘 零五 零八



答曰　積二百五十九歩八零七六二
　定法二箇五分九厘八毛
　術曰　立天元一為中鈎〇丨自之為三段方
　面冪〇〇丨寄左〇列方面自乗之就分三之
　得数与寄左相消得開方式丰〇丨平方開之
　得中鈎依是得積二百五十九歩八零七六二
　強為実以方面冪為法而一得 尾数去之 定法合
　問

求七角率術

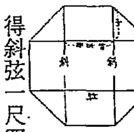
仮如有七角毎面一尺則問斜弦積及定法各若干



答曰　斜一尺八寸零一厘九毛三七
　七三五八強
　積三百六十三歩三分九厘一毛
　二四強
　定法三箇六分三三九
術曰　立天元一為斜弦〇丅自乗之為斜弦冪〇〇丨
内減方面冪餘為因子方面　〇丨寄左〇列斜以方面
相乗加入方面冪得丨　以減斜冪餘為因丑方面丅丅
丨以寄左相乗之為方面冪々丨丨丰丅丨再
寄〇列方面三自乗之得数与再寄相消得開方式丨丰
丅丨空級縮之
九万為法開之得斜弦一尺八寸零一厘九毛三七七三
五八弦依是得三百六十三歩三分九厘一二四弦為数（ママ）
以方面冪為法而一得三箇六分三三九 尾数去之 為定法
合問

求八角率術

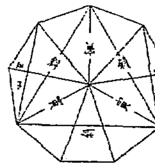
仮如有八角毎面一尺則問斜弦積及定法若干
　答曰　斜二尺四寸一分四二一三五
　六
　　積四百八十二歩八分四厘二七
　　定法四箇八分二厘八毛四



術曰　立天元一為斜弦〇丨内減方面餘為二箇子丅
　丨自之為二段方面冪丨丰丨寄
　左〇列方面自乗之就分倍之得数与寄
　左相消得開方式　丰丨平方飜法開之
得斜弦一尺四寸一分四二一三六強依是積得四百八
十二歩八分四二七一二為実以方面冪為法而一得四
箇八分二八四　尾数
　　　去之　為定法合問

求九角率術

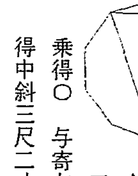
仮如有九角毎面一尺則問斜弦積及定法若干
　答曰　斜二尺五寸三二分零八八八八
　　積六尺一十八歩一分八二四　一
　　定法六箇一分八厘一毛八　九



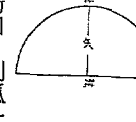
　術曰　立天元一為斜弦〇丨以方面相
　乗加入方面冪為子冪丨丨以減四段方
　面冪餘四段為丑冪（丅Ⅲ丅）寄斜自乗
　之　斜冪亦為三
　　　Ⅲ丨以甲位相乗之為因丑冪
一十二段寅冪亦為三段方面冪々〇〇Ⅲ丅寄左〇列
方面三自之就分三之得数与寄左相消開方式丰〇Ⅲ
丅立法飜法開之得斜弦二尺五寸三二零八八八八三
七六強依是得積六百一十八歩一八二四一九強為実
以方面冪為法而一得六箇一八一八 尾数去之 為定法合
問

求十角率術

仮如一十角毎面一尺則問中斜積及定法若干
　答曰　斜三尺二寸三分三厘六毛零六七九七七
　　積七百六十九歩四分二零八八
　　定法七箇六分四三

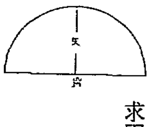


　術曰　立天元一為中斜〇丨自乗之為
　斜冪〇〇丨内減四段方冪餘為因方面
　二箇斜丰〇丨寄左〇列倍斜以方面相
乗得〇　与寄左相消得開方式丰丰丨平方飜法開之
得中斜三尺二寸三分三六零六七九五弱依是得積七
百六十九歩四四零八八四強為実以方面冪為法而一
得七箇六分九四二 尾数去之 為定法合問



仮如有円闕弦一尺 円径 矢五寸 半径 孤
一尺五寸七分 半周 則問孤率若干
　答曰　五箇八分五九六
術曰　列孤一尺五寸七分自之得二百四十六歩四分
九厘内減弦冪餘得一百四十八歩四九為実〇列矢五
寸自因之得二十五歩為法而一得孤率五箇八分五厘
九六合問 有孤率秘術 師之秘決也

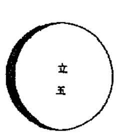
求円闕率術



仮如有円欠弦一尺 円径 矢五寸 半径 則
問円闕率術若干
　答曰　三分一厘四毛
術曰　列倍弦一尺加入矢五寸共得二尺五寸以矢相
因之得一百二十五歩為法〇列円径自乗之得一百歩
以七分八五 円法 相乗之得七十八歩五分折半之得三
十九歩二五 乃孤積也 為実如法而一得闕率三分一厘四
毛合問 有円欠秘術 師乃秘決也

求五順積術

仮如有立玉貫一尺則問皮積乃率 若干
　答曰　皮積三百十四歩 六一
　　定率三箇一分四一六



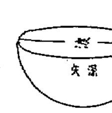
術曰　列貫一尺四之得四尺以貫相因
之得四百歩以七分八五四 円法 乗之得皮積三百一十
四歩一六為実〇列貫冪為法而一得定率三箇一分四
一六合問

求玉積率

仮如有立玉貫一尺則問積及玉率 若干

　答曰　積五百二十三歩六分
　　率五分二厘三毛六糸
術曰　列貫一尺四之以貫相因之得四
百歩以七分八五四 円法 乗之得皮積三百一十四歩一
分六厘以貫半五寸相乗之得一千五百七十坪為定法
　　　　五百二十三坪六
為実〇列玉貫再自乗之得一千坪為法実如法而一得
率五分二厘三毛六合問

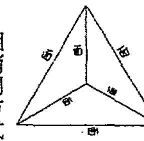
求玉闕率術



仮如有玉闕渡一尺 玉貫 深矢五寸貫則
問積乃闕率若干
　答曰　積二百六十一歩八分
　　闕率七分五厘
術曰　列渡一尺自之得一百歩寄位〇列深矢五寸自
之得二十五歩以減寄位餘得七十五分為実以渡冪法
ト又而一得闕率合問

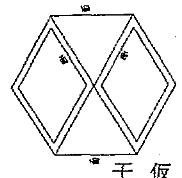
求蕎麦形率術

仮如有蕎麦形毎面一尺則問積乃率各若干
　答曰　積一百一十七坪八分五一一三
　　一分一厘七八五



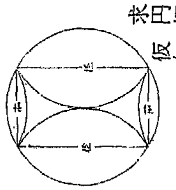
　術曰　立天元一為心高〇丨自之為高
　冪〇〇丨三之為二段方面冪〇〇Ⅲ寄
　左〇列方面自之就分倍之得数与寄左
相消開方式丰〇Ⅲ平方開之得心高八寸一分六四九
六五八強〇列方面自因之得数三因四帰得七十五歩
為実平方開之得平三角中鈎八寸六分六厘零二五四
以方面相因得八十六歩六分零二五四以高相乗之得
七百零七坪一分零六七七七二九三一三二以六約之
得積一百一十七坪八分五一一三 微弱 為実以方再乗冪
為法実如法而一得一分一厘七毛八五 尾数去之 為定法
合問

求方切籠率術



仮如有方切籠毎面一尺則問積乃定率若
干
　答曰　積二千三百五十七坪零二二
　　率二箇三分五厘七毛

術曰　立天元一為高〇一自乗之為二段方面冪〇〇
一一寄左〇列方面自因之就分倍之得数与寄左相消
得開方式廾〇一平方開之得高一尺四寸一分四二一
三五六以方面冪相乗之得一千四百一十四坪二分一
三五六寄位〇列高以方面相乗得一百四十一歩四二一
一三五六以方半五寸相因之四之得二千八百二十八
坪四分二七一二以三約之得九百四十二坪八分零九
零四加入寄位共得積二千三百五十七坪零二一三六為
実以方面再乗冪為法而一得二箇三分五厘七毛 去尾之数
為定法合問



求円切篭率術
仮如有円切篭径各一尺間積及定率若干
答曰　積九百六十五坪令七一
一一五七
率九分六厘五毛零七
術曰　立天元一為深矢〇一加入円径以深矢相乗四
之為円径冪〇川川寄左〇列円径自之得数与寄左相
消得開方式十川川平方開之得深矢二寸零七一零六
七八〇列倍深矢加入円径得全玉貫一尺四寸一分四
厘二一二五六再乗之得二千八百二十八坪四分二七
一二寄位〇列円径自乗之得一百歩以七分半 定法 次
乗之得七十五歩加入深矢冪得七十九歩二分八九三
一八三二九六八四以深矢相乗之得数六之得九百八
十五坪二分八厘一三六七九八二九九二七一五一四
五一二以減位餘得一千八百四十三坪一分四五七五
二 去尾之数 位五分二三六 法主 乗之得積九百六十五坪
令七厘一一一五七四七二為実以円径再乗冪一千坪
為法而一得九分六厘五毛令七忽 去尾之数 為定率而合
問

算法根源記大尾

論　説

ニュートンの補間公式から「招差法」(差分商) へ、そして「招差又術」

内田　孝俊

1　はじめに

n 組の $(x_i、y_i)$ $(i=1、2、3、\cdots、n)$ を与えたとき、これらの n 組の値をみたす高次方程式は、補間公式としていくつか挙げられるが、その中に、次の式で表わされるニュートン（1642～1727）の補間公式がある。

$$y=\lambda_0+\lambda_1(x-x_1)+\lambda_2(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+\lambda_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

この方程式の係数 λ_i は、未定係数として置かれるもので、この値を定めるには、上式に n 組の $(x_i、y_i)$ を順次与えて、n 個の λ_i を順次定めて行くものであるが、その求め方によっては、関孝和（1640？～1708）が、支那の天文学から学びとったと言われる「招差法」(『括要算法巻元』の「累裁招差之法」) を修整した安島直円（1732～1798）の「招差法」(『招差捷術』の「術曰」文）の形で、表現できることを2節で示し、3節で安島のそれは、どのようなものであるかを『招差捷術』の例題で説明する。ところが、この例題3問すべてに、「術曰」文の別解法として、「又術」文が挙げられている。この「又術」なるものは、上記のニュートンの形とまったく外形を同じくするのであるが、その違いは、その係数 λ_i は「術曰」の「招差法」によって得られた値としていることである。つまり、ニュートンの公式自体の λ_i は未知数であるが、この「又術」では、「招差法」によって求められているもので、上記ニュートンの公式の形として表わされた時点で、すでに高次方程式は決定されているものである。その「又術」の方法を4節で示す。最後に5節おわりにとして、以上の感想を述べる。

2　ニュートンの補間公式における係数は、「招差法」の形で表現できる

次節で『招差捷術』における例題を挙げるので、与える $(x_i、y_i)$ $(i=1、2、3、4、5)$ としてニュートンの補間公式は、次の4次式とする。

$$y=\lambda_0+\lambda_1(x-x_1)+\lambda_2(x-x_1)(x-x_2)+\lambda_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$+\lambda_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \qquad (\mathrm{I})$$

この係数 λ_i の定め方は、普通 $x=x_1、x_2、\cdots、x_5$ に対して $y=y_1、y_2、\cdots、y_5$ として順次代入して、λ_i を定めていくので、計算は極めて繁雑になって行く。ところが、順次代

入して行く時の計算法によっては、「招差法」の形式にして行くことの出来ることを示す。つまり「招差法」は代入法に他ならないのである。

今、(Ⅰ) 式に5組の (x_i, y_i) を与えた式を書き並べてみる。

$x = x_1$ として、$y_1 = \lambda_0$ 　(ⅰ)

$x = x_2$ として、$y_2 = \lambda_0 + \lambda_1(x_2 - x_1)$ 　(ⅱ)

$x = x_3$ として、$y_3 = \lambda_0 + \lambda_1(x_3 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ 　(ⅲ)

$x = x_4$ として、$y_4 = \lambda_0 + \lambda_1(x_4 - x_1) + \lambda_2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$
$\qquad + \lambda_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$ 　(ⅳ)

$x = x_5$ として、$y_5 = \lambda_0 + \lambda_1(x_5 - x_1) + \lambda_2(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)$
$\qquad + \lambda_3(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)$
$\qquad + \lambda_4(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)$ 　(ⅴ)

これから、λ_i の値を出すべく移項して、定まった λ_i を、順次定義した y_i^j で置きかえて行くと、表1が得られる。

表1　ニュートンの補間公式における係数の招差法による求め方

ニュートンの補間公式：$y = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_1) + \lambda_2(x - x_1)(x - x_2) + \lambda_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
$+ \lambda_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

x_1　$\lambda_0 = y_1$

x_2　$y_2 - y_1 - \lambda_1(x_2 - x_1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv y_2^1$

x_3　$y_3 - y_1 - \lambda_1(x_3 - x_1)$　$y_3 - (y_1 + y_2^1(x_3 - x_1)) - \lambda_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0 \rightarrow \lambda_2 = \dfrac{y_3^1 - y_2^1}{x_3 - x_2} \equiv y_3^2$

x_4　$y_4 - y_1 - \lambda_1(x_4 - x_1)$　$y_4 - (y_1 + y_2^1(x_4 - x_1)) - \lambda_2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$
$y_4 - (y_1 + y_2^1(x_4 - x_1) + y_3^2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)) - \lambda_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = 0$
$\rightarrow \lambda_3 = \dfrac{y_4^2 - y_3^2}{x_4 - x_3} \equiv y_4^3$

x_5　$y_5 - y_1 - \lambda_1(x_5 - x_1)$　$y_5 - (y_1 + y_2^1(x_5 - x_1)) - \lambda_2(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)$
$y_5 - (y_1 + y_2^1(x_5 - x_1) + y_3^2(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)) - \lambda_3(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)$
$y_5 - (y_1 + y_2^1(x_5 - x_1) + y_3^2(x_5 - x_1)(x_5 - x_2) + y_4^3(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3))$
$- \lambda_4(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4) = 0 \rightarrow \lambda_4 = \dfrac{y_5^3 - y_4^3}{x_5 - x_4} \equiv y_5^4$

上記表1を説明する。

(ⅰ) 式から、$\lambda_0 = y_1$ と定まる。

(ⅱ) 式から、$\lambda_1(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$ より $\lambda_1 = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \equiv y_2^1$ と置いて、このように定まる。この式を含めて、$(y_i - y_1) / (x_i - x_1) \equiv y_i^1$ $(i = 2、3、4、5)$　と置く。

(ⅲ) 式から、$\lambda_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = (y_3 - y_1) - y_2^1(x_3 - x_1)$

これより $\lambda_2 = (y_3^1 - y_2^1) / (x_3 - x_2) \equiv y_3^2$　と置いて、このように定まる。この式を含めて、

$(y_i^1 - y_2^1) / (x_i - x_2) \equiv y_i^2$ $(i = 3、4、5)$　と置く。

(ⅳ) 式から、$\lambda_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$
$= (y_4 - y_1) - y_2^1(x_4 - x_1) - y_3^2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$
$= ((y_4 - y_1) / (x_4 - x_1) - y_2^1)(x_4 - x_1) - y_3^2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$
$= (y_4^1 - y_2^1)(x_4 - x_1) - y_3^2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$
$= ((y_4^1 - y_2^1) / (x_4 - x_2) - y_3^2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$
$= (y_4^2 - y_3^2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$

これより、$\lambda_3 = (y_4^2 - y_3^2) / (x_4 - x_3) \equiv y_4^3$　と置き、このように定まる。この式を含めて、$(y_i^2 - y_3^2) / (x_i - x_3) \equiv y_i^3$ $(i = 4、5)$　と置く。

(ⅴ) 式から、$\lambda_4(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)$
$= (y_5 - y_1) - y_2^1(x_5 - x_1) - y_3^2(x_5 - x_1)(x_5 - x_2) - y_4^3(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)$
$= ((y_5 - y_1) / (x_5 - x_1) - y_2^1)(x_5 - x_1) - y_3^2(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)$
$\qquad - y_4^3(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)$
$= ((y_5^1 - y_2^1) / (x_5 - x_2) - y_3^2)(x_5 - x_1)(x_5 - x_2) - y_4^3(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)$
$= ((y_5^2 - y_3^2) / (x_5 - x_3) - y_4^3)(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)$
$= (y_5^3 - y_4^3)(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)$

これより、$\lambda_4 = (y_5^3 - y_4^3) / (x_5 - x_4) \equiv y_5^4$　と置き、このように定まる。

以上における λ_i ではない各階の差分商 y_i^j は、$\lambda_i = y_{i+1}^i$ における $i + 1$ を単純に拡張したが、むしろ次のように考えるとよい。

第1階の差分商では、

$y_i - y_1 - \lambda_1^{(i)}(x_i - x_1) = 0$　と置くと、$\lambda_1^{(i)} = \dfrac{y_i - y_1}{x_i - x_1} \equiv y_i^1$ $(i = 3、4、5)$

第2階の差分商では、

$y_i - (y_i + y_i^1(x_i - x_1)) - \lambda_2^{(i)}(x_i - x_1)(x_i - x_2) = 0$　と置くと、

$\lambda_2^{(i)} = \dfrac{y_i^1 - y_i^1}{x_i - x_2} \equiv y_i^2$ $(i = 4、5)$

第3階の差分商では、

$y_5 - (y_1 + y_2^1(x_5 - x_1) + y_3^2(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)) - \lambda_3^{(5)}(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3) = 0$

と置くと、

$\lambda_3^{(5)} = \dfrac{y_5^2 - y_3^2}{x_5 - x_3} \equiv y_5^3$

以上に示したように、λ_i は「招差法」の形で求められているのを見る。この結果をまとめて表にすれば、そのことは一層歴然としてくる。

表 2　表 1 の結果を書き並べた表

x_1	$\lambda_0 = y_1$				
x_2	y_2	$\lambda_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv y_2^1$			
x_3	y_3	$\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \equiv y_3^1$	$\lambda_2 = \dfrac{y_3^1 - y_2^1}{x_3 - x_2} \equiv y_3^2$		
x_4	y_4	$\dfrac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} \equiv y_4^1$	$\dfrac{y_4^1 - y_3^1}{x_4 - x_2} \equiv y_4^1$	$\lambda_3 = \dfrac{y_4^2 - y_3^2}{x_4 - x_3} \equiv y_4^3$	
x_5	y_5	$\dfrac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1} \equiv y_5^1$	$\dfrac{y_5^1 - y_2^1}{x_5 - x_2} \equiv y_5^2$	$\dfrac{y_5^2 - y_3^2}{x_5 - x_3} \equiv y_5^3$	$\lambda_4 = \dfrac{y_5^3 - y_4^3}{x_5 - x_4} \equiv y_5^4$

これは、関孝和の「累裁招差之法」とは差分のとり方が違うだけで、本質的に同じ「招差法」(差分商) によるもので、安島直円の『招差捷術』における「術曰」文における「招差法」の例題を次節でとり挙げるが、それとまったく同じものである。

こうして、ニュートンの補間公式における係数は「招差法」(差分商) によって表現されることを知るのである。

3　「招差法」について

ここでも「招差法」とは、1 節で述べた安島の『招差捷術』における「術曰」文による解法のことである。

今、その 2 番目の例題をとり挙げて説明する。

〈例題〉　(x_i, y_i) の値の組が次のように与えられている。

「仮如」として

	甲	乙	丙	丁	戊
限数	1	2	3	4	5
元積	245	975	2179	3827	5905

「問各差」が、あり、

「答曰」として、立差負 3、平差正251、定差正 2、直差負 5。

次に、(以下、甲限数、乙限数、……を省略して、単に甲、乙、……とする)

「術曰」として、

定積＝(乙元積－甲元積)／(乙－甲)＝734　①

平積＝((丙元積－甲元積)／(丙－甲)－定積)／(丙－乙)＝233　②

立積＝(((丁元積－甲元積)／(丁－甲)－定積)／(丁－乙)－平積)／(丁－丙)　③
＝－3

(((戊元積－甲元積)／(戊－甲)－定積)／(戊－乙)－平積)／(戊－丙)－立積　④
＝恰尽

立差＝立積＝－3

としている。

「若於是、猶得正負若干、則応以丁戊限差除之、為三乗差」

若し、ここで 0 とならない正負何れかの数となれば、④式を (戊－丁) で割って、それを三乗差として係数が定まるとしている。この前の最初の例題では、これより 1 次低い状態で 0 となるのであるが、0 とならないならば、[立差とせず] 立積としているのである。誤写でないとすれば、立差と断定まで行かないようである。求める係数の乗差の個数だけの (x_i, y_i) の組が与えられれば、各乗数は決まるということが理解していないように見受けられる。もともと「招差法」[「累裁招差之法」、『混沌式』等、少なくとも安島までのもの] は、(x_i, y_i) の組が過剰に与えられているのである。というのは、あるいくつかの組によって各係数が決まり、それ以後の組の数 [『混沌式』は、x の値のみを余計にいくつも与えられている] は、それまでの方程式を満たすような与え方をしている。これは支那の天文学に起因するものであろうか。数学的には脱却していない、といえる (高次の係数から順次低次へと求めているのである)。

さて、立差が決まったので、平、定、直の各差は次のように求めている。

平差＝平積－(甲＋乙＋丙)・立差＝251

定差は、次の 2 項目が 2 つに分けられて計算されているが、まとめて書くと、

定差＝定積－((甲＋乙)＋甲²)・立差＋(甲＋乙)・平差
＝734－(－21＋753)＝＋2

と定まり、次に、

直差 ＝甲元積－((立差・甲＋平差)・甲＋定差)・甲＝－5

として、立、平、定、直の各差が、以上のように導かれている。

これらのことを現代記法で解釈し、何故このようにすれば各差が求まるのかを述べる。

問　$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 245 \end{cases}$　$\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 979 \end{cases}$　$\begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 2179 \end{cases}$　$\begin{cases} x_4 = 4 \\ y_4 = 3827 \end{cases}$　$\begin{cases} x_5 = 5 \\ y_5 = 5905 \end{cases}$

のとき、$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$　の係数 a_i を求めよ、ということである。ただ上記の高次方程式を、$y = (((a_4x + a_3)\,x + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0$　と書く和算家が多い。ここもそうである。

「答曰」として、$a_4 = 0$ となって、立差：$a_3 = -3$、平差：$a_2 = 251$、定差：$a_1 = 2$、直差：$a_0 = -5$。

「術曰」文は、次のように解釈される。(y_i^j の文字の定義は 2 節にまったく則る)。

先ず①式：

定積：$y_2^1 \equiv (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = (979 - 245) / (2 - 1) = 734$

次に②式：

一番内側の分数式は、

$$y_3^1 \equiv (y_3 - y_1) / (x_3 - x_1) = (2179-245) / (3-1) = 967$$

平積：$y_3^2 \equiv (y_3^1 - y_2^1) / (x_3 - x_2) = (967-734) / (3-2) = 233$

③式：

一番内側の分数式は、

$$y_4^1 \equiv (y_4 - y_1) / (x_4 - x_1) = (3827-245) / (4-1) = 1194$$

以下の計算も y_i^j を用いて順次計算すると、

$$y_4^2 \equiv (y_4^1 - y_2^1) / (x_4 - x_2) = (1194-734) / (4-2) = 230$$

立積：$y_4^3 \equiv (y_4^2 - y_3^2) / (x_4 - x_3) = (230-233) / (4-3) = -3$

となる。

④式：

内側の分数式から、y_i^j を用いて順次計算すると、

$$y_5^1 = (y_5 - y_1) / (x_5 - x_1) = (5905-245) / (5-1) = 1415$$

$$y_5^2 = (y_5^1 - y_2^1) / (x_5 - x_2) = (1415-734) / (5-2) = 227$$

$$y_5^3 = (y_5^2 - y_3^2) / (x_5 - x_3) = (227-233) / (5-3) = -3$$

最終的に、$y_4^3 - y_5^3 = (-3) - (-3) = 0$　となる。

そこで、三乗差：$a_4 = 0$　となって、立差＝立積と決まるのである。

立差：$a_3 = y_4^3 = -3$

以上を表にすると次のようになる。結局前節2の表2と同じものになる。ただ、与えられた「問」の（限数、元積）の組の与え方から、三乗差が0となるだけの違いである。

表3　『招差捷術』の例題

限数	元　積	定　積	平　積	立積（立差）
$x_1 = 1$	$y_1 = 245$			
$x_2 = 2$	$y_2 = 979$	$y_2^1 \equiv \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 734$		
$x_3 = 3$	$y_3 = 2179$	$y_3^1 \equiv \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 967$	$y_3^2 \equiv \frac{y_3^1 - y_2^1}{x_3 - x_2} = 233$	
$x_4 = 4$	$y_4 = 3827$	$y_4^1 \equiv \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} = 1194$	$y_4^2 \equiv \frac{y_4^1 - y_3^1}{x_4 - x_2} = 230$	$y_4^3 \equiv \frac{y_4^2 - y_3^2}{x_4 - x_3} = -3$
$x_5 = 5$	$y_5 = 5905$	$y_5^1 \equiv \frac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1} = 1415$	$y_5^2 \equiv \frac{y_5^1 - y_2^1}{x_5 - x_2} = 270$	$y_5^3 \equiv \frac{y_5^2 - y_3^2}{x_5 - x_3} = -3$

次に、術文通りに計算すれば、何故、立差：$a_3 = -3$　が決まり、平、定、直の各差：a_2、a_1、a_0 が求められるのかは、次の理由からである。（術文にはその理由が書かれていない）

前述のように、原文は

$$y_i = (((a_4 x_i + a_3) x_i + a_2) x_i + a_1) x_i + a_0$$

ではあるが、展開した、

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + a_4 x_i^4 \quad (i = 1、2、\cdots、5)$$

この形で計算した方が計算しやすい。（安島も、各所によっては、この方法をとったのではないか）。

$$y_i - y_1 = a_1 (x_i - x_1) + a_2 (x_i^2 - x_1^2) + a_3 (x_i^3 - x_1^3) + a_4 (x_i^4 - x_1^4)$$

よって、

$$y_i^1 = a_1 + a_2 (x_i + x_1) + a_3 (x_i^2 + x_i x_1 + x_1^2) x_i + a_4 (x_i^3 + x_i^2 x_1 + x_i x_1^2 + x_1^3) \quad (i = 2、3、4、5)$$

$$\begin{aligned} y_i^1 - y_2^1 &= a_2 (x_i - x_2) + a_3 ((x_i^2 - x_2^2) + (x_i - x_2) x_1) \\ &\quad + a_4 ((x_i^3 - x_2^3) + (x_i^2 - x_2^2) x_1 + (x_i - x_2) x_1^2) \\ &= a_2 (x_i - x_2) + a_3 (x_i - x_2)(x_i + x_2 + x_1) \\ &\quad + a_4 (x_i - x_2)((x_i + x_2 + x_1) x_i + (x_2 + x_1) x_2 + x_1^2) \end{aligned}$$

よって、

$$y_i^2 = a_2 + a_3 (x_i + x_2 + x_1) + a_4 ((x_i + x_2 + x_1) x_i + (x_2 + x_1) x_2 + x_1^2) \quad (i = 3、4、5)$$

$$y_i^2 - y_3^2 = a_3 (x_i - x_3) + a_4 (x_i - x_3)(x_i + x_3 + x_2 + x_1)$$

よって、

$$y_i^3 = a_3 + a_4 (x_i + x_3 + x_2 + x_1) \quad (i = 4、5)$$

よって、

$$y_5^3 - y_4^3 = a_4 (x_5 - x_4)$$

他方、④式：$y_5^3 - y_4^3 = 0$　であったから、

$a_4 (x_5 - x_4) = 0$ $(x_5 \neq x_4)$　より　$a_4 = 0$。

よって、立積：$y_4^3 = a_3 = -3$　と立差がきまるのである。

以下、a_2、a_1、a_0 は次の通り決まってくる。

$$y_3^2 = a_2 + a_3 (x_3 + x_2 + x_1)$$

より、平差：$a_2 = y_3^2 - a_3 (x_3 + x_2 + x_1) = 233 - (-3)(3+2+1) = 251$

また、$y_2^1 = a_1 + a_2 (x_2 + x_1) + a_3 ((x_2 + x_1) x_2 + x_1^2)$

より、定差：$a_1 = y_2^1 - (a_2 (x_2 + x_1) + a_3 ((x_2 + x_1) x_2 + x_1^2)) = 734 - 732 = 2$

また、$y_1 = ((a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1) x_1 + a_0$

より、直差：$a_0 = y_1 - ((a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1) x_1 = 245 - 250 = -5$

このようにして、各差が求まるのである。

4 「招差又術」について

次に、『招差捷術』の「術曰」文の別解法の「又術」文の方法に入る。

3節の例題について「又術」文に沿って説明する。

問題は、

	甲	乙	丙	丁	戊
限数	1	2	3	4	5
元積	245	979	2179	3827	5905

のとき、 $y=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$

の係数が a_i を求めよ、ということであった。

3節で述べた「招差法」によって、最高次の係数、立差：$a_3=-3$ が決まったとする。つまり、表3の各数値 y_i^j が求められたとする。その上で、次のように天元術によって計算するのである。(天元術の記法は、横行に縦書きとしている)。

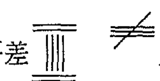
「立天元一為限数 ○ —」：x

「甲限数＝限数－甲 —」：$x-x_1=x-1$

「乙限差＝限数－乙 —」：$x-x_2=x-2$

「丙限差＝限数－丙 —」：$x-x_3=x-3$

その上で、次の計算をして行くのである。

「…為丙限差、 —、乗立差、加平差 」：

$$a_3(x-x_3)+y_3^2=-3(x-3)+233=-3x+242$$

「乗乙限差、加定積得 」：

分かりやすくするために、連ねて書いて行く。

$$(a_3(x-x_3)+y_3^2)(x-x_2)+y_2^1=(-3x+242)(x-2)+734=-3x^2+248x+250$$

更に、その上に次の計算をする。

「乗甲限差、加甲元積、得 」：

$$((a_3(x-x_3)+y_3^2)(x-x_2)+y_2^1)(x-x_1)+y_1=(-3x^2+248x+250)(x-1)+245$$
$$=-3x^3+251x^2+2x-5$$

こうして高次式そのものが得られた、とするのである。したがって、各差［各係数］は、

下級＝立差：$a_3=-3$、二級＝平差：$a_2=+251$

三級＝定差：$a_1=+2$、止級＝直差：$a_0=-5$

となる。

2節の $\lambda_i:=y^i_{i+1}$ $(i=0、1、2、3；y_1^0=y_1)$ であることから、このことは明らかであるが、安島自身どのようにして見つけたかは分からない。とにかくこれでよいことを示す。

求めた式は、

$$y=((a_3(x-x_3)+y_3^2)(x-x_2)+y_2^1)(x-x_1)+y_1 \qquad (\text{Ⅱ})$$

であるから、$x=x_i$ のとき $y=y_i$ となることを示せばよい。

$x=x_1$ のとき $y=y_1$

$x=x_2$ のとき、

$$y=y_2^1(x_2-x_1)y_1=((y_2-y_1)/(x_2-x_1))(x_2-x_1)+y_1=y_2$$

$x=x_3$ のとき、

$$y=(y_3^2(x_3-x_2)+y_2^1)(x_3-x_1)+y_1=y_3^1(x_3-x_1)+y_1=y_3$$

$x=x_4$ のとき、

$$\begin{aligned}y&=((a_3(x_4-x_3)+y_3^2)(x_4-x_2)+y_2^1)(x_4-x_1)+y_1\\&=((y_3^4(x_4-x_3)+y_3^2)(x_4-x_2)+y_2^1)(x_4-x_1)+y_1\\&=(y_4^2(x_4-x_2)+y_2^1)(x_4-x_1)+y_1\\&=y_4^1(x_4-x_1)+y_1=y_4\end{aligned}$$

$x=x_5$ のとき、

$$\begin{aligned}y&=((a_3(x_5-x_3)+y_3^2)(x_5-x_2)+y_2^1)(x_5-x_1)+y_1\\&=((y_5^3(x_5-x_3)+y_3^2)(x_5-x_2)+y_2^1)(x_5-x_1)+y_1\\&=(y_5^2(x_5-x_2)+y_2^1)(x_5-x_1)+y_1\\&=y_5^1(x_5-x_1)+y_1=y_5\end{aligned}$$

このようにして（Ⅱ）式は、すべての $(x_i、y_i)$ $(i=1、2、3、4、5)$ の組をみたすことが分かる。

前述したように、安島は、一体どのようなことから、この方法を見出したものかは、分からない。しかし、ただ、各乗差の呼称は、表3を例にとれば、関は、各乗差の縦の欄すべてをその乗差を示すのに対して、安島は最上段のみを各乗差と呼称している。（Ⅱ）式に関係あるのは、この最上段、すなわち、安島の呼称する各乗差だけであることである。

とにかく、安島は（Ⅱ）式を得ているのである。このことは、それまでの「招差法」とは異質のものであるし、「捷術」の呼称もこれから言うのかも知れない。

5 おわりに

こうして、前節4の「又術」の方法（Ⅱ）式の形だけを見ると、2節で述べたニュートンの補間公式とは同一の形をとっているものの、一方は、その係数は未知数として置かれているものであり、他方は、すでに求められたものが係数として置かれているものである、という大きな違いがあるものの、形が同じであることに、関心が寄せられるのである。

また、ニュートンの補間公式の係数を求めるのに、「招差法」によって求められるということも、東西で独自に発展した数学がどこかの底で繋がっている因縁を感ぜざるを得ない。本稿の要は、これにあったとも言えるが、参考文献 [3] と重複する面があるにもかかわらず、敢えて『招差捷術』に言い及んだのは、[3] で説明不足の点を補う意味もあり、ニュートンの補間公式と「招差法」との直接の関連において、『招差捷術』の存在、とくに「招差又術」に言及したかったからである。

(平成10年10月 8 日受理)

本稿は、'98第 5 回関東甲信越静和算研究大会東京大会において発表した資料を基に加筆したものである。

参考文献

[1]　平山・下平・広瀬編著『関孝和全集』
[2]　平山・松岡編集『安島直円全集』
[3]　拙稿「招差法とニュートンの補間公式」数学史研究通巻149号

落 穂 集

関孝和墓石の法名の改刻年について

大竹　茂雄

関孝和の墓は、東京都新宿区弁天町の浄輪寺にあって、昭和33年10月 7 日付けで東京都史跡に指定されている。ところで、墓石に刻んである「法行院殿宗達日心大居士」という法名は、寛政年間に改刻されたもので、それ以前の法名は「法行院宗達日心」であったとされている。その改刻の年代について、平山諦『関孝和』(恒星社) では寛政 6 年 (1794) から同12年 (1800) の間としている。

論拠は、浄輪寺に保存されてある小冊子の板本の付記 (寛政12年の年紀) に依っているが、文章の解釈に少し疑義があるように思われる。

私は、本年の関孝和290年祭に際し「関孝和の回忌法要と顕彰行事」(群馬県和算研究会『会報』No.34所載) を執筆したが、その過程で関孝和の法名改刻の年代を明らかにできる、次の二つの史料を見出した。なお、Aの史料については、すでに発表した (『平山諦先生長壽記念文集』1996、所載の拙稿「関孝和と上毛の和算家」) が、一般には目に留まらないと思うので再録しておく。

A　一悳子誌「算法雑記」(日本学士院蔵)

一悳子は、石田玄圭 (?～文化14年) の字である。本書は30丁ほどの稿本で、各種の問題と解義を記した後に、関孝和と藤田貞資の墓碑銘が記録されてある。関孝和については、寛政 6 年建立の「關先生の墓」の碑文の次に、

宝永五年戊子十月廿四日卒
法行院殿宗達日心大居士　文化四年丁卯秋改
贈院殿大居士位
文化四年丁卯行百會忌法事
在牛込七軒寺町淨輪寺

と記してある。

この記事は、文化 4 年 (1807) の秋に「院殿大居士」と言う法名を贈り百回忌の法要を

行なったことを示している。

B　「關孝和先生碑銘」弘化三年午二月六日再寫　中曽根氏（群馬県榛名町　中曽根家蔵）

> 寳永五年戊子十月二十四日卒
> 法行院殿宗達日心大居士
>
> 姓藤原諱孝和称新介（ママ）
> 文化四年丁卯歳
> 相當一百箇年五傅藤田権平（ママ）嘉言
> 臺石鋪石等修復之
> 同年十月二十四日法會貞資門人等
> 東都牛込七軒寺町　淨輪寺
> 文化八年辛未十月二十四日謹拝
> 六傅　小野良佐榮重

左のように記した後に、「關先生之墓」の碑文が記録してある。そして末尾には、「文化八年未十月廿四日寫」とある。

小野栄重（宝暦13年～天保2年）は藤田貞資（享保19年～文化4年）に師事したが、貞資の死後、遺言により藤田嘉言から関流見・隠・伏の三題免許を、文化8年11月3日付けで授与された。おそらく栄重は、免許状を受取るのに少し早めに江戸へ赴き、関孝和の命日に墓参をしたのであろう。そしてその時に、墓と碑の文を写し取ったと思われる。

史料Bは、文化4年の孝和の100回忌に、墓の台石と敷石等を修復したことを明らかにしている。法名の改刻については直接記してないが、「等」と記してある点にその含みがあるように思われる。

さて、二つの史料から次のように言って間違いなかろう。藤田貞資は、関孝和の100回忌を迎えるに際し、法名に「院殿大居士」を贈り、墓石を修復し同時に法名の改刻を施した。そして、命日の文化4年10月24日には、貞資門下挙げての盛大な法要を企画した。しかしながら残念にも、貞資は二か月半ほど前の8月6日に亡くなってしまった。したがって、10月24日の100回忌法要は、貞資の後継者となった子の嘉言が主宰して行った。

なお、藤田貞資の自筆と思われる「日本算者系」（日本学士院蔵）の最後にある「關夫子之由緒」の中で、関孝和の法名を「法行院宗達日心居士」と記している点について、上記の『関孝和』では、藤田貞資は「寛政六年に記念碑を建てる前に、孝和の墓に参うでたものであろう。記憶違いなどによって、居士と誤って書き加えたものと思う」としているが、本書の末尾には、「右之通及承候以上　天明元年七月廿一日　　藤田権平」とある。この奥書からすれば、貞資は墓石から直接写したのでなく、誰かから聞いたか何かの書を見たかして書いたと思われる。

図　書

江戸時代の算術〈当世塵劫記〉

中村信弥著　教育書館　pp.162－XXii　定価[本体2,700円＋税]

この頃和算書の復刻や入門書、研究書が次々に刊行されて喜びに堪えない。本書は江戸時代庶民の〈読み書き算盤〉の算盤に相当するものとして『塵劫記』を学んだ。そのため『……塵劫記』、『塵劫記……』というタイトルの書物が多数出版された。その代表として『当世塵劫記』を取り上げ、その中でも中、高校生の学んでいる数学の内容により近いものとし、主として算術の部分を解説したものである。

内容は次のようである。

第1章　江戸時代初めまでの算術
　第1節　室町時代までの算術　　第2節　日本人による算術書
第2章　会田安明と最上流
　第1節　会田安明の生い立ち　　第2節　最上流と関流の論争（二田の争い）
　第3節　会田安明の著述
第3章　『当世塵劫記』
　第1節　問題を解く前に
　第2節　『当世塵劫記』の問題
　　第1問　子供角力の事　　第2問　俵回しの事
　　第3問　酒一樽の入に及び一升代をしる事　　第4問　船積運賃の事
　　第5問　巣算の事　　第6問　杉形算の事
　　第7問　油計り見る事　　第8問　田畑溜井の事
　　第9問　同　　第10問　蔵に米を積む事
　　第11問　銭相場の事　　第12問　木綿売買の事
　　第13問　絹盗人の事　　第14問　入子算の事
　　第15問　馬三疋を四人にて求る事　　第16問　象の食石を計る事
　　第17問　立木の高を積る事　　第18問　山の高を計る事
　　第19問　利息算の事　　第20問　同
　　第21問　絹布を買事　　第22問　鳥の啼声を計る事

第23問　柴縄〆の事　　　　　　　　第24問～37問　雑術

第３節　現代解法　『塵劫記』と会田安明関係　年表

『当世塵劫記』の印影と現代活字文

跋

となっている。

最上流と関流の論争（二田の争い）は一々問題を掲げての論争を示して大変興味深い。

猶、巻末の『当世塵劫記』の印影と現代活字文は初心者には絶好の入門書となろう。一読を薦める。

（道脇義正）

図　　書

和算の成立　上

鈴木武雄著　幸栄印刷刊　pp.114　定価[本体2,700円＋税]

本書は４章より成るが、第１章の村瀬義益と逐次近似法と第２章以下第４章迄の磯村吉徳の師　高原吉種は潜入宣教師　ジュセッペ・キアラ　だと断定に至る過程が資料をもとに述べられている。

第１章　村瀬義益と逐次近似法　　逐次近似法についての調査、研究より磯村吉徳、村瀬義益の『算法勿憚改』を調べ、三次方程式を解くために漸化式すなわち近似解を求めるという方法を示した。

磯村吉徳：『増補算法闕疑』の逐次近似法や初見の『同文算指』の開平法が逐次近似法で求められていることに及んでいる。磯村が『同文算指』を解読して『算法勿憚改』の重要部分に応用したと思われる点を列挙している。例えば　$X^2+X-1=0$　の近似解を求めるのに平方根を用いた近似法ではなく、

$$X\ (X+1)\ =1\quad \therefore X=1/(X+1)$$

ここで

$$X_{n+1}=1/(X_n+1)\qquad \text{とおき}$$

$X_0=0$、$X_1=1$、$X_2=0.5$、$X_3=0.666\cdots$、$X_4=0.6$、……とする漸化式を用いている。

また連分数展開、さらには三次方程式にも、また特殊な型の四次、五次方程式の近似解と、現代のコンピュータ解法との関連を述べる。

第２章　謎の和算家　高原吉種　　和算を研究し始めたとき、学系

毛利重能　―　高原吉種　―　関孝和　―　……

とあったが、高原吉種についてはなにも書かれていない。不思議におもっていた。しかし筆者にはその方面の知識は皆無。研究もしていなかった。平山諦：『和算の誕生』を読み、カルロス・スピノラの話を知った。

鎖国の中で潜入宣教師を切支丹屋敷で測量術・天文・暦学など研究し、和算の興隆の基になった。

第３章　二本松藩士　磯村吉徳　　仮設〈磯村吉徳は高原吉種の門人である。〉についていろいろ『増修日本数学史』、『林鶴一和算研究集録』、『明治前日本数学史』　第一巻　など

をあげて論を進めている。
第４章　井上政重とその時代　　第２章で述べた切支丹屋敷での研究は、府の大物の援助がなければ出来ない。大目付として三代将軍家光に任命された重役井上政重が登場する。

逐次近似法がこの頃から研究されていたこと。知らなかった資料が次々に出て来て大変おもしろい。一読の価値ありと思い紹介する次第である。

（道脇義正）

図　　書

伊能図に学ぶ

東京地学協会（伊能忠敬記念出版物編集委員会）編集　朝倉書店
1998年７月10日発行　定価［本体5,000円＋税］

上記委員会委員長石山洋氏の序言によると「忠敬没後一五〇年に際しては、本会〔東京地学協会〕でも記念出版を計画、保柳睦美編著『伊能忠敬の科学的業績』（1974年）を世に送った。忠敬生誕250年を迎えて、改めて記念事業が企画され、実行委員会（委員長町田　洋）を設け、検討の結果、やはり出版物を公刊するのが適当と意見の一致を見た。そこで同委員会を改組し、記念出版物編集委員会に再編した。ただし、このたびは、現在における最新の知見を総合し、伊能図をさまざまな角度から解剖し、解説して、より親しみのある存在として伊能図が認識されるように工夫するとともに、現存伊能図の一覧表や関連研究文献目録、伊能忠敬『測量日記』抄なども揃え、今後の研究に備えることとした」とある。（上の〔　〕内は筆者補）

Ｂ５判ソフト装、本文、資料、索引とも266ページ。口絵16ページ、うち８ページはカラーである。すべてアート紙を用いているので、本文、資料中に豊富にある写真や図版も鮮明で理解を助ける。

第一章　伊能図に学ぶ視点　は上記石山氏の執筆である。

ロシア出身の地図学史家バクロフ（1881—1957）の『地図学史』（1951）中の「日本」での伊能忠敬の取り扱いを引用され、それを正すかたちで、我が国測量術の略史、忠敬の測量術学習の時期、全国測量の目的等を述べられる。筆者には話が精密に感じられ、得ることが多かった。

ついで、第二章以下各氏の執筆事項の目的、内容概説、相互の関係を述べられる。

第二章　伊能忠敬の人間像　は『伊能忠敬』(三省堂選書）で筆者にも記憶のある小島一仁氏である。ここでは、妻ミチの「悪妻伝説」を具体的に否定して忠敬の像を浮かび上がらせているのが印象に残った。

この章の終わりの方で、大谷亮吉の大著に引用された、娘の妙薫にあてた手紙の一節「わたしは、幼年から高名出世を好みましたが、親の命によって佐原へ養子となったので、好きな学問も止め……」を挙げて、このことが「忠敬が「高名出世」のために、その事業にとりくんだ」という誤解を生んだが、実は然らず、として、忠敬の別の書簡を示される。

読者は54ページの

文化一〇年の火事——高橋景保と伊能忠敬——　安藤由紀子氏執筆をあわせ読むと、よりよく理解されるであろう。この火事は筆者は初耳であった。以下、

第三章	伊能忠敬の全国測量と現地の対応について ——第一次測量～第五次測量を中心に——	渡辺孝雄氏
第四章	伊能図の諸相	齋藤　仁　渡邊一郎氏
第五章	伊能図の読み方	鶴見英策氏
第六章	伊能図——『大日本沿海輿地全図』——の後裔	清水靖夫氏
第七章	日本測量史における伊能図	
	(a)　国絵図と伊能図の測量術比較	川村博忠氏
	(b)　伊能図と近現代の地図との違い	清水靖夫氏
第八章	世界測量史における伊能図	金窪敏知氏
第九章	伊能図の評価と今後の課題	羽田野正隆氏
第一〇章	伊能忠敬の顕彰史再考——伊能図と地磁気の人脈——	西川　治氏

で本文を終わり、ついで

資料一	伊能図総目録	渡邊一郎氏
資料二	伊能忠敬研究文献目録	中村宗敏氏
資料三	測量日記（抄）	佐久間達夫氏
資料四	地方史における伊能忠敬、その事例的表示	西川　治　新沢義博氏

その後、索引４ページで終わる。

上述の“文化一〇年の火事”のような、いわば挿入記事は、他に

伊能忠敬の見た山々の方位線	長岡正利氏
緯度測量に見る忠敬から林蔵への技術移転	土屋　巌氏
封廻状　——シーボルト事件の判決——	伊能陽子氏

がある。

以上、充実して要を得た内容、それに伴う判形、用紙と言えるのではあるまいか。

第七章のなかに、建部賢弘が享保年間の日本総図編集に参画して行った仕事が具体的にある。これも筆者には新知見であった。また、読み進んで「石黒信由」「小野栄重」などの名に、旧知に逢う思いがした。繙いて各位それぞれの旧知に逢われることをお勧めしたい。

（田中　充）

数学史学会

ひとこと伝言板

【行事】

総会以降の活動報告です。

◎第79回　数学史講座
期日　平成10年６月20日(土)
会場　清泉女子大学　参加15名
講師　西田知己「江戸文化と算術」
講師　中村信弥「算法瑚璉について」

◎第５回　数学史研究発表大会
期日　平成10年11月22日(日)～23日(月)
会場　上智大学　７号舘1215教室
○11月22日(日)　20名参加
田中　充「ながさきむじん物語の遺題—元禄びとは七乗根をどう求めたか」
杉本敏夫「関の二つの答術における双弧法」
○11月23日（月）22名参加
三村太郎「算法助術の問題について」
新井正夫「麟徳歴の上元積年の算出(2)」
竹之内　脩「田中由真について」
柳本　浩「千葉量七編　探索算法に於けるサイクロイド曲線の解法について」
小寺　裕「遺題継承について」

◎第80回　数学史講座
期日　平成10年12月12日(土)
講師　清水布夫「和算の解法を楽しむ」
講師　内山　昭「ネピアの計算機からパスカルの計算機へ」
21名参加（忘年会参加者12名）

【各地区の活動報告】

◇関東甲信越静　和算研究交流大会
期日　平成10年８月23日(日)～24日
会場　私学総合センター
○８月23日　算額見学は一般参加者17名を含めて45名参加
○８月24日　私学総合センターにて２名の研究発表と各県の報告交流。28名参加

◇東北地区和算研究交流会
〔主催　山形県和算研究会〕
期日　平成10年11月１日(日)～２日(月)
会場　山形県　新庄市民文化会館他
参加　山形を中心に秋田、岩手、福島、東京、神奈川の各地から30名
○11月１日　講演「安嶋直円外山方の和算」（千喜良英二）と和算資料見学。
○11月２日　研究発表会（６名)。

◇関孝和290年祭記念行事〔主催　群馬県和算研究会・藤岡市教育委員会〕
△算額題コンクール
期日　平成10年８月22日（土）
会場　群馬工科大学
68名申し込み53名参加
記念講演会で11名を表彰。
△記念講演会
期日　平成10年11月13日（金）
会場　藤岡市民ホール
松岡元久「和算と算数・数学教育」
松崎利雄「関孝和と和算」
群馬の人達の他各地の研究者が参加。
詳細は数学史研究で報告する予定です。

【各地の数学史関係行事開催の予定】

○「江戸末期から明治初期の科学展」
期間　平成11年１月23日～２月27日
会場　熊谷市立図書館
（和算・計量・天文などの展示）

○「日本の算数」
期間　平成11年２月９日～３月14日
会場　水戸市立図書館

○和算研究所イベント
期日　平成10年３月27日（土）
会場　江戸東京博物館１Ｆ会議室他
テーマ「和算にまなぶ」
講演、シンポジウム、資料のコピーなど

○漢字文化圏と近隣諸国の数学史・数学教育国際シンポジウム（ＩＳＨＭＥ）
期日　平成11年８月18日～21日
場所　前橋東急イン（受付、開会式)、前橋工科大学、参加費　30,000円
＊参加をご希望の方は下記へ連絡を。
実施要綱と申込用紙を送ります。
柴原英雄　〒239-0803
横須賀市桜ヶ丘 2-20-2-212
ＴＥＬ・ＦＡＸ　0468-35-6579

【お願い】

今後このような欄を充実させたいと思います。各地の情報をお寄せください。

編集後記

都合により、本号から編集を担当することになりました。なにしろ初めてのことですし、自分のやる事は他人がいろいろ気づいても、とかく本人は気づかないものです。ご意見がございましたらどしどしお寄せ下さい。お待ちしております。

〈お願い〉投稿論説の受理日以降の原稿の加筆・削除は認められませんので、ご了承下さい。

（上野　尚亨）

日本数学史学会　年会費　10,000円

郵便振替　00120-6-20022

新規お申し込みの方は，日本数学史学会事務局または研成社へお問い合わせください。

数学史研究

通巻　159号（1998年10月～12月）

編集発行　日本数学史学会

〒192-0001 東京都八王子市戸吹町1100

明治大学付属中野八王子高校内　佐藤健一

TEL　0426-91-0321

FAX　0426-91-0988

発売　㈱研成社

〒103-0014 東京都中央区日本橋蛎殻町1-6-4

電話03-3669-1828㈹／FAX03-3669-1850

ISSN 0386-9555

SŪGAKUSHI KENKYŪ

JOURNAL OF HISTORY OF MATHEMATICS, JAPAN

No. 159

October-December, 1998

CONTENTS

ARTICLES

NOTE

BOOK

Edited and Published by

The History of Mathematics Society of Japan

数学史研究　（通巻159号）平成10年12月25日

定価2,500円（本体2,381円）