和算におけるHeronの公式

小寺　裕
kotera@asahi.email.ne.jp
http://www.asahi-net.or.jp/~ nj7h-ktr/

§0. はじめに

ここでいう Heronの公式 とは，三辺の長さが a, b, c の三角形の面積 S が

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right) \qquad \cdots \text{(H1)}$$

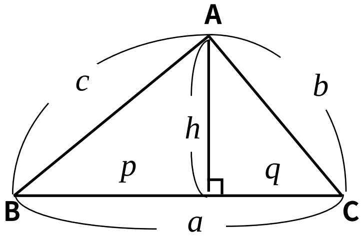
または

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \qquad \cdots \text{(H2)}$$

と書ける公式のことをさすものとする．
本稿の目的は，和算でこの定理がどのように扱われていたかを考察することである．
以下の和算書から抜き出してみる．

⑴ 竪亥録　寛永16年(1639)　今村知商
⑵ 算法闕疑抄　万治二年(1659)　礒村吉徳
⑶ 算爼　寛文3年(1663)　村松茂清
⑷ 算書　寛延2年(1749)　高山重邦
⑸ 算法勿憚改　延宝9年(1681)　村瀬義益
⑹ 算法天元指南　元禄11年(1698)　佐藤茂春
⑺ 南山子三円術　1770頃　安島直円
⑻ 参較連乗　文化4年(1807)
⑼ 算法助術　天保12年(1841)　山本賀前

記号は右図のように統一しておく．



§1. 和算書でのHeronの公式の扱い

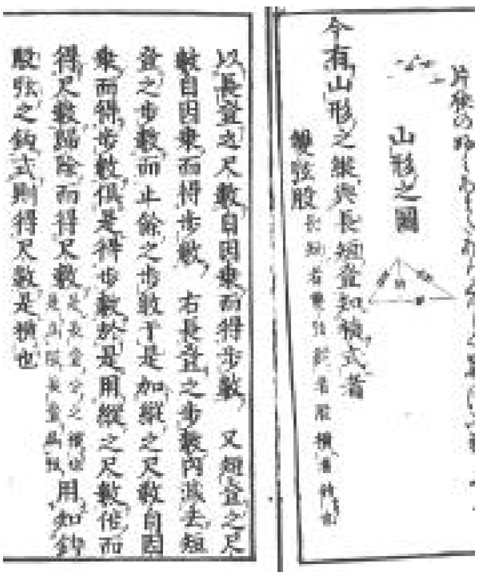
⑴ 竪亥録　下之一

山形の長登1尺，短登7寸5分，
たて1尺2寸5分にして，よこの
寸を知るには …

$$q=\frac{b^2-c^2+a^2}{2a},$$

$$h=\sqrt{b^2-q^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2-c^2+a^2}{2a}\right)^2}$$

(証明なし)


山形之圖
今有山形之縦與長短登知横式者
以長登之尺數自因乗而得歩數　又短登之尺
數自因乗而得歩數　右長登之歩數内減去短
登之歩數而止餘之歩數于是加縦之尺數自因
乗而得歩數併是得歩數於是用縦之尺數倍而
得尺數歸除而得尺數　用加鈎
股弦之鈎式則得尺數是横也

⑵ 算法闕疑抄

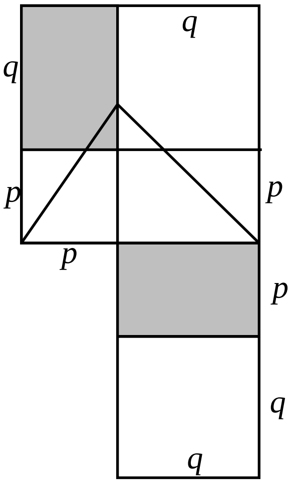
三之巻

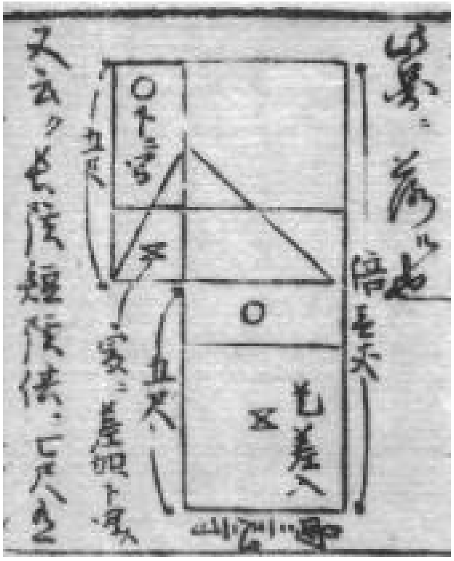
今山形平の長登4尺短登3尺股5尺有　然ニ長登方ノ股と短登方ノ股ト中鈎問

答云　長登股3尺2寸　短登股1尺8寸　中ノ径鈎2尺4寸

$$q=\frac{b^2-c^2+a^2}{2a}\ ,\qquad h=\sqrt{b^2-q^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2-c^2+a^2}{2a}\right)^2}$$

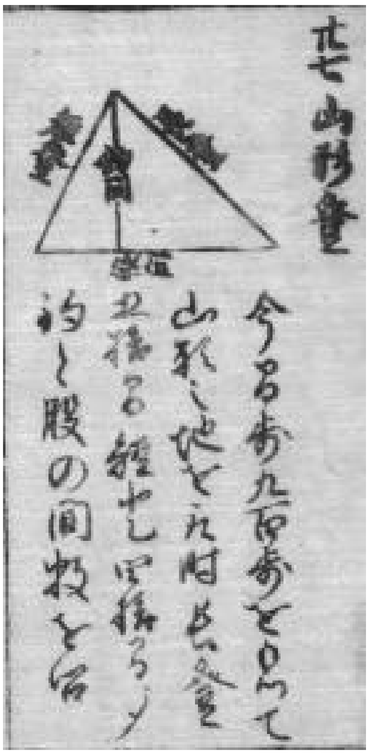
増補版の証明





五之巻

今間歩900歩をもって山形の地を取時長登
50間短登40間にして鈎と股の間数を問



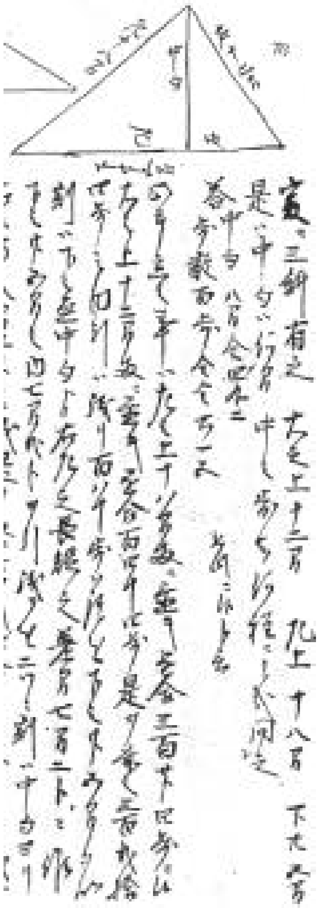
$$a=\sqrt{\left\{b+\sqrt{c^2-\left(\frac{2S}{b}\right)^2}\right\}^2+\left(\frac{2S}{b}\right)^2}$$

(証明なし)

⑷ 算書　第76問

爰ニ三斜有之　右之上(b)12間　左上(c)18間

下(a)25間，是ハ中勾ハ何間，中之歩ハ何程ニ候哉問之



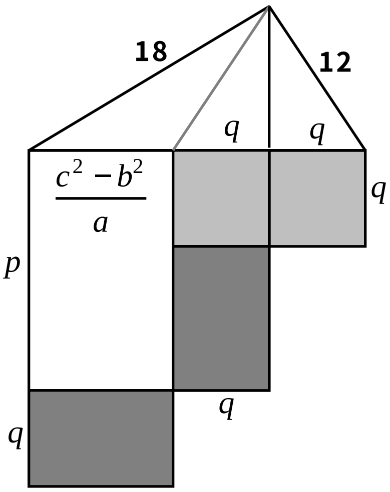
$$q=\frac{1}{2}\left(a-\frac{c^2-b^2}{a}\right)\quad\cdots ①$$

$$h=\sqrt{b^2-q^2}=\sqrt{b^2-\left\{\frac{1}{2}\left(a-\frac{c^2-b^2}{a}\right)\right\}^2}=8.0492$$

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\times 25\times 8.0492=100.615$$

①の証明は書かれていないが，$c^2-b^2=p^2-q^2$

だから，次のように考えたのではないかと思われる．



⑸ 算法勿憚改 (巻之四)

▲童介抄ニ云

山形の長登(b)50間，短登(c)40間の内歩数(S)900歩有て股(a)を問

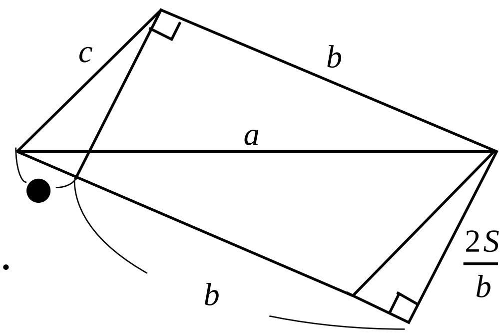
答　48間543　術に云

$$a=\sqrt{\left\{b-\sqrt{c^2-\left(\frac{2S}{b}\right)^2}\right\}^2+\left(\frac{2S}{b}\right)^2}$$

予判して云　誤也　不可用　右の見立を図に写考え見るに相違有之也　其分け下に記

$$\cdot=\sqrt{c^2-\left(\frac{2S}{b}\right)^2}$$

●を加えるべきを引は誤也．



▲根源記ニ云

$$a=\sqrt{\left\{c+\sqrt{b^2-\left(\frac{2S}{c}\right)^2}\right\}^2+\left(\frac{2S}{c}\right)^2}$$

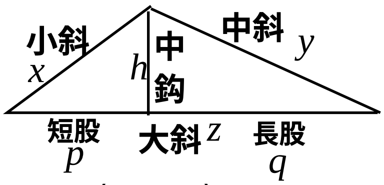
△自見ニ云

$$a=\sqrt{\left\{b+\sqrt{c^2-\left(\frac{2S}{b}\right)^2}\right\}^2+\left(\frac{2S}{b}\right)^2}$$

⑹ 算法天元指南　巻之九

$$4x^2z^2-\left(z^2-y^2+x^2\right)^2=16S^2$$

今有三斜寸平積二十一歩　只云従大斜寸而中斜寸者短二寸　又云従中斜寸而小斜寸者短三寸五歩　問大中小斜各幾何



小斜を x とする．

中斜 $y=x+3.5$　大斜 $z=y+2=x+5.5$

$$y^2-x^2=\left(h^2+q^2\right)-\left(p^2+h^2\right)=q^2-p^2$$
$$=\left(q+p\right)\left(q-p\right)=z\left(q-p\right)$$

$$z^2-\left(y^2-x^2\right)=z^2-\left(q-p\right)z=z\left(z-q+p\right)=2pz$$

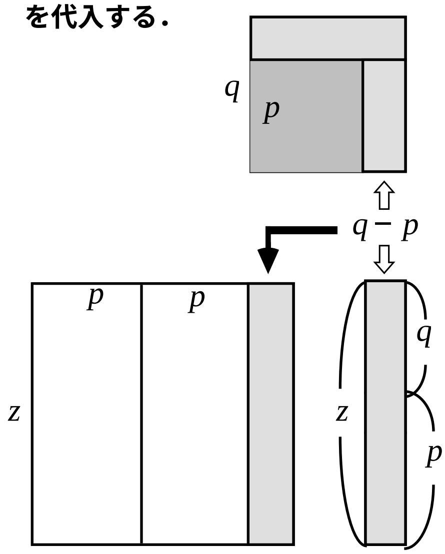
ところで　$4x^2z^2-4p^2z^2=4z^2\left(x^2-p^2\right)=4z^2h^2=16S^2$

だから　$4x^2z^2-\left(z^2-y^2+x^2\right)^2=16S^2$


解圖

中斜冪ハ長股巾ト中鉤巾ト相併ル數ナリ
小斜冪ハ短股巾ト中鉤巾ト相併ル數ナリ
此故ニ中斜巾ノ内小斜巾ヲ減ズレバ中鉤巾ハ皆減ジ盡テ余リハ長股巾ト短股巾トノ差ノ數ナリコノヲ以テ大斜ニ因ル長股ト短股トノ差ニナルコトヲ知ルナリ次ノ圖ニテ見ルベシ
如此大斜ニ因ル長股ト短股トノ差ニナルコトヲ知ルナリコレヲ以テ大斜巾ノ内ヲ減ズレバ余リ大斜ニ因ル二段ノ短股トナルナリ次ノ圖ニテ見ルベシ
○如此大斜ニ因ル二段ノ短股トナルナリコレヲ自乗スル故大斜巾ニ因ル二ノ四段ノ短股巾トナルナリ

ここに　$y=x+3.5$,　$z=x+5.5$ を代入する．



⑺ 南山子三円術

第1問　内接円の直径を R **，** $a+b-c=\alpha$, $a-b+c=\beta$, $-a+b+c=\gamma$ **とおくと**

$$\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)R^2$$

現在の公式に最も近いが証明はない．

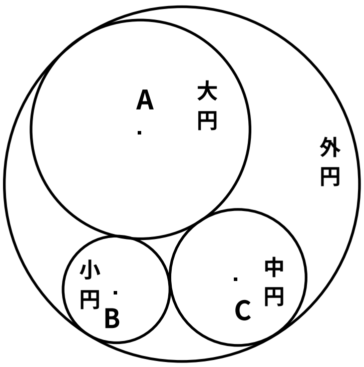
なお，[12]P.180 および [10]P.123 には次のような記述がある．

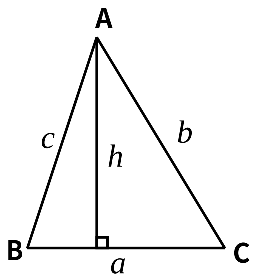
> **安島直円の南山子三円術には**
>
> $$a+b-c=\text{甲},\ a-b+c=\text{乙},\quad -a+b+c=\text{丙}$$
>
> **とおいて**
>
> $$h=\frac{1}{2a}\sqrt{\text{甲乙丙}(\text{甲}+\text{乙}+\text{丙})}\quad\cdots②$$
>
> **としている．これから Heron の公式**
>
> $$S=\frac{1}{4}\sqrt{\text{甲乙丙}(\text{甲}+\text{乙}+\text{丙})}\quad\cdots③$$
>
> **がいえる．**

しかし，三円術には②および③にあたる式はみあたらない．また， $a+b-c=\text{甲}$ **などとおく根拠は何であろうか．**

第2問を見てみよう．

大円径12寸，中円径5寸，小円径3寸，問外円径





この解義の中で

$$\text{大}^2\text{中小}+\text{大中}^2\text{小}+\text{大中小}^2=4a^2h^2$$

の関係が使われているが，これは今までにもしばしば出てきた

$$4a^2h^2=4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$$

に $a=\frac{\text{中}}{2}+\frac{\text{小}}{2},\ b=\frac{\text{中}}{2}+\frac{\text{大}}{2},\ c=\frac{\text{小}}{2}+\frac{\text{大}}{2}$ **を代入すれば直接計算できる．**

ところで

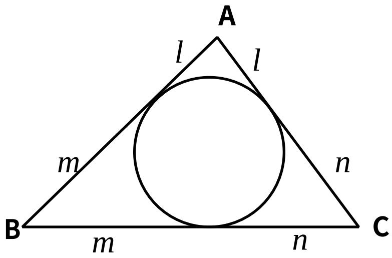
甲 $=a+b-c$ **=中径，　乙** $=a-b+c$ **=小径，　丙** $=-a+b+c$ **=大径**

だから　$4a^2h^2=\text{甲}^2\text{乙丙}+\text{甲乙}^2\text{丙}+\text{甲乙丙}^2$

すなわち　$h=\frac{1}{2a}\sqrt{\text{甲乙丙}(\text{甲}+\text{乙}+\text{丙})}$

これが 甲，乙，丙 の根拠であろう．

⑻ 参較連乗　[10]による



$S^2 = lmn(l+m+n)$

証明はつぎのようになっている．

$a^2 = m^2 + 2mn + n^2$

$b^2 = n^2 + 2nl + l^2$

$c^2 = l^2 + 2lm + m^2$

を　$a^2 + b^2 - c^2 = 2aq$　へ代入すると

$n^2 + n(l+m) - lm = aq$

∴

$$a^2b^2 - a^2q^2 = (m^2 + 2mn + n^2)(n^2 + 2nl + l^2) - \{n^2 + n(l+m) - lm\}^2$$
$$= 4lmn(l+m+n)$$

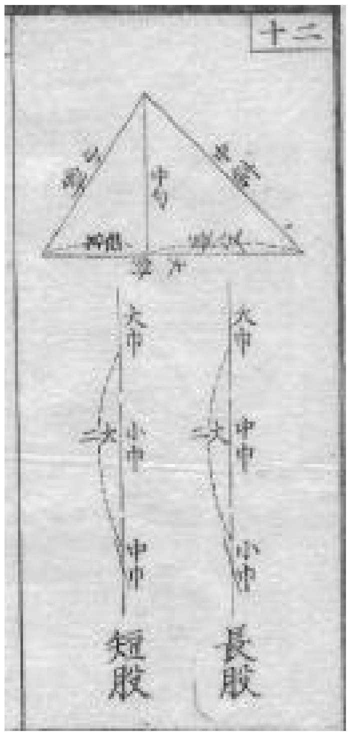
一方　$a^2b^2 - a^2q^2 = a^2(b^2 - q^2) = a^2h^2 = 4S^2$　だから

$S^2 = lmn(l+m+n)$

⑻ 算法助術　幾何公式集

公式第20番

$$q = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},\quad p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$



§2. まとめ

(A) 和算では公式として (H1)(H2)の形では
見かけない．

(B) 「算法天元指南」巻之三 の矩合適等集，
あるいは公式集「算法助術」などでも取り
上げられていない．

(C) 何でも公式化してしまう和算にあって，
Heron はなぜか公式化されなかった．

(D) しかし，三辺の長さから面積を出すalgorithm
は確立していた．

(E) また，三辺の長さから面積を求める問題が
意外に少なかった．

(F) 使用頻度が少なく，公式化するには複雑
すぎる．(現代の教育にも通じるものがある)

References

[01]『竪亥録仮名抄―原書印影・現代文字と解説』　佐藤健一　研成社　1988
[02]『算法勿憚改』　江戸初期和算選書第3巻　西田知巳校注　研成社　1993
[03]『算書―現代訳と解説』　高橋大人　ぶなの木書房　1994
[04]『増補算法闕疑抄』　礒村吉徳　貞享元年
[05]『頭書算法闕疑抄』　小谷静枝喜寿記念出版　私家版　1985
[06]『算法天元指南』　佐藤茂春　元禄11年
[07]『改正天元指南』　佐藤茂春　寛政7年

[08]『安島直円全集』　平山諦・松岡元久編　富士短期大学出版部1983
[09]『安島直円の業績』　加藤平左ェ門　名古屋大学数学教室　1971
[10]『和算ノ研究　雑論III』　加藤平左ェ門　日本学術振興会　1956
[11]『算法助術』　山本賀前　天保12年
[12]『幾何学大辞典1』　岩田至康編　槇書店　1971
[13]　『算爼-現代訳と解説-』　佐藤健一　研成社　1987