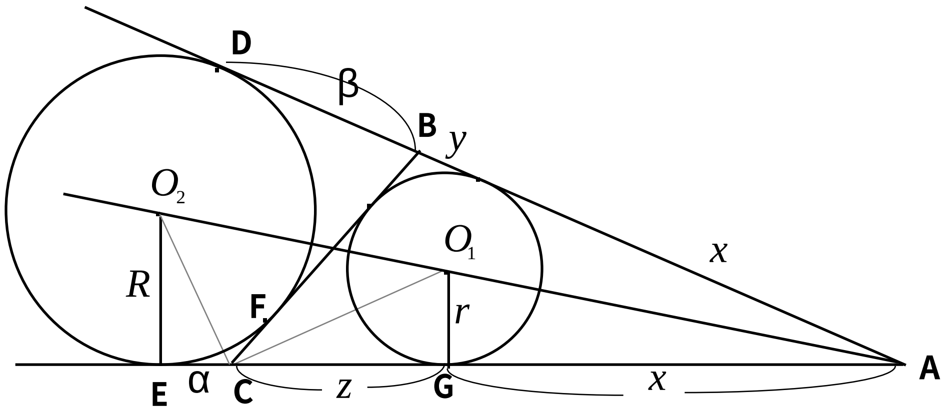
【付録】

有馬頼僮著「拾機算法」明和6年(1769)第四巻作式第二問に内接円を持つ奇数多角形の辺の長さを与えて，内接円の半径を求める問題がある．この方法を三角形に応用すればHeronの公式が導ける．



まず， $\alpha = y,\quad \beta = z$ **を示す．**

$AE = x + z + \alpha,\quad AD = x + y + \beta$ **で** $AE = AD$ **より**

$$z + \alpha = y + \beta \quad \cdots \text{①}$$

$BC = y + z$ **で一方** $BC = BF + FC = \beta + \alpha$ **だから**

$$y + z = \beta + \alpha \quad \cdots \text{②}$$

①②より $\alpha = y,\quad \beta = z$

よって $R : r = AE : AG = x + z + \alpha : x = x + y + z : x$

$$r(x + y + z) = xR$$

ここで， $s = \dfrac{a + b + c}{2}$ **とおくと**

$s = x + y + z,\quad x = s - a,\quad y = s - b,\quad z = s - c$ **だから**

三角形の面積 $S = rs = xR = (s - a)R$

$$S^2 = s(s - a)rR$$

ところで， $\Delta O_1CG \quad \Delta O_2CE$ **より** $R : \alpha = z : r$

$$rR = \alpha z = yz = (s - b)(s - c)$$

$$S^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$