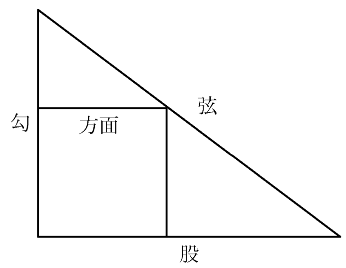
研幾算法での鈎股弦適等集の使い方　　　小寺　裕

9　$\begin{cases} 股^2 + 勾 + 方面 = A \\ 弦 = C \end{cases}$



立天元一為勾

【天元一 $=$ 勾 $=$ 】x

自之得数以減弦巾余股巾

【股$^2 =$ 】$C^2 - x^2$

加入勾共得数以減只云数余為方面

【方面 $=$ 】$A - \{(C^2 - x^2) + x\}$

以勾相乗為因勾與方面差股

方面 $\cdot$ 勾 $=$ (勾 $-$ 方) 股 $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ (適等 79)

【(勾 $-$ 方) 股 $=$ 】$\left(A - \{(C^2 - x^2) + x\}\right) x$

自之為因勾與方面差巾股巾寄左

【(勾 $-$ 方)^{2}股$^2 =$ 】$\{A - ((C^2 - x^2) + x)\}^2 x^2$　　→左

列勾内減方面余自之以股巾相乗得数與寄左相消

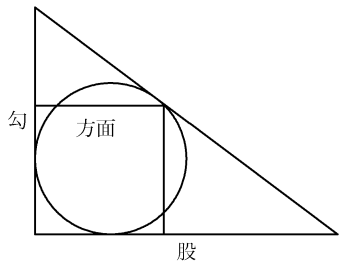
【(勾 $-$ 方)^{2}股$^2 =$ 】$\left\{x - (A - (C^2 - x^2 + x))\right\}^2 (C^2 - x^2)$　　→左と相消

10

$$\begin{cases} 勾^2 + 股 + 方 = A \\ 径 = R \end{cases}$$

立天元一為勾

【天元一 = 勾 = 】x



内減円径余為股弦差

【弦 − 股 = 】$x - R$

自之得数以減勾巾余為因股弦差二個股寄甲位

$$勾^2 - (弦 - 股)^2 = (弦 - 股) \cdot 2\,股 \cdots\cdots (適等\ 56)$$

【(弦 − 股) · 2 股 = 】$x^2 - (x - R)^2$ →甲

列円径自之得数以減倍之勾巾余為因股弦差二個勾股和寄乙位

$$径^2 = 2\{\ 勾^2 - (股 + 股)(弦 - 股)\} \cdots\cdots (中西)$$

【(弦 − 股) · 2(勾 + 股) = 】$2(x^2 - R^2)$ →乙

列只云数内減勾巾余倍之以股弦差相乗得内減甲位余為因股弦差二個方面

【(弦 − 股) · 2 方面 = 】$2(A - x^2)(x - R) - (x^2 - (x - R)^2)$

これは $(弦 + 方面) - 股 = 方面$ に $2(弦 - 股)$ を掛けたもの

$2(股 + 方面)(弦 - 股) - (弦 - 股) \cdot 2\,股 = (弦 - 股) \cdot 2\,方面$

を適等に使った.

以乙位相乗為因股弦差巾八段勾股積寄左

$$2\,積 = (勾 + 股) \cdot 方面 \cdots\cdots (適等\ 76)$$

【$(弦 - 股)^2 \cdot 8\,積$ = 】$\{2(A - x^2)(x - R) - (x^2 - (x - R)^2)\} \cdot 2(x^2 - R^2)$ →左

列甲位以勾相乗亦以股弦差相乗得数倍之與寄左相消

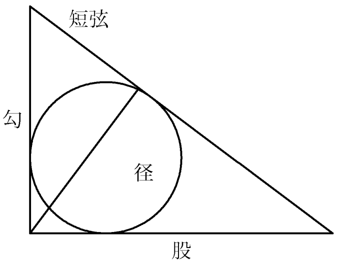
【$2(弦 - 股)^2 \cdot 2\,股 \cdot 勾$ = 】$2(x^2 - (x - R)^2)x(x - R)$ 左と相消

$\boxed{11}$

$$\begin{cases} 短弦 + 2\,径 = A \\ 勾 + 弦 + \dfrac{1}{2}径 = B \end{cases}$$

立天元一為勾

【天元一 = 勾 = 】x



三之得数以減倍之又云数余為股弦和

【股 + 弦 = 】$2B - 3x$

自之得数加入勾巾為因股弦和二個弦寄甲位

$$(股 + 弦)^2 + 勾^2 = (股 + 弦) \cdot 2\,弦 \cdots\cdots (適等\,60)$$

【$(股 + 弦) \cdot 2\,弦 =$ 】$(2B - 3x)^2 + x^2$　　→甲

列勾自之為因弦短弦

$$勾^2 = 弦 \cdot 短弦 \cdots\cdots (適等\,16)$$

【$弦 \cdot 短弦 =$ 】x^2

以股弦和相乗得数倍之寄乙位

【$2\,弦 \cdot 短弦\,(股 + 弦) =$ 】$2(2B - 3x)x^2$　　→乙

列先云数以甲位相乗得内減乙位余以股弦和相乗為因股弦和巾因弦四個円径寄左

【$(股 + 弦)^2 \cdot 弦 \cdot 4\,径 =$ 】$\left\{A((2B - 3x)^2 + x^2) - 2(2B - 3x)x^2\right\}(2B - 3x)$　　→左

これは $A - 短弦 = 2\,径$ に $(股 + 弦)^2 \cdot 2\,弦$ を掛けたもの

$A(股 + 弦)^2 \cdot 2\,弦 - 短弦\,(股 + 弦)^2 \cdot 2\,弦 = (股 + 弦)^2 \cdot 弦 \cdot 4\,径$

を適等に使った.

列股弦和内減勾余以勾相乗為因股弦和円径以

$$(股 + 弦 - 勾)\,勾 = (股 + 弦)\,径 \cdots\cdots (適等\,105)(致近\,83)$$

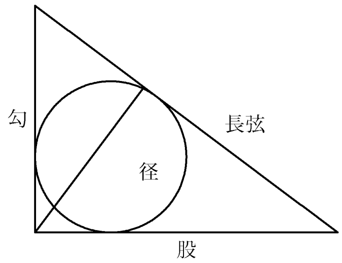
【$(股 + 弦)\,径 =$ 】$((2B - 3x) - x)x$

以甲位相乗得数倍之與寄左相消

【$(股 + 弦)^2 \cdot 弦 \cdot 4\,径 =$ 】$((2B - 3x) - x)x\{(2B - 3x)^2 + x^2\} \cdot 2$　　→左と相消

14

$$\begin{cases} 4\,股 + 弦 = A \\ 長弦 - 径 = B \end{cases}$$



立天元一為股

【天元一 = 股 = 】x

内減円径余為股弦差

【弦 − 股 = 】$x - R$

四之得数以減先云数余為弦

【弦 = 】$A - 4x$

以又云数相乗得数減股巾余為弦因円径

弦 · 径 = 股^2 − 弦 (長弦 − 径) · · · · · (適等 16 変)

【弦 · 径 = 】$x^2 - B(A - 4x)$

加入弦巾為因弦勾股和寄左

【弦 · (勾 + 股) = 】$\{x^2 - B(A - 4x)\} + (4x - A)^2$ →左

弦 (勾 + 股) = 弦 · 径 + 弦^2 · · · · · (適等 97 変)

列股以弦相乗得数以減左寄余自之為因弦巾勾巾再寄

【弦^2 · 勾^2 = 】$\{(x^2 - B(4x - A)) + (4x - A)^2 - x(4x - A)\}^2$ →再寄

これは

弦 · 勾 = 弦 (勾 + 股) − 股 · 弦

を適等に使った.

列弦自之得内減股巾余為勾巾

【勾^2 = 】$(4x - A)^2 - x^2$

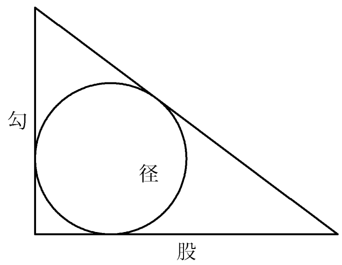
以弦巾相乗得数與再寄相消

【弦^2 · 勾^2 = 】$((4x - A)^2 - x^2)(4x - A)^2$ 再寄と相消

24

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\text{股} + \text{弦}^2 + \text{径} = A \\ \text{勾} = B \end{cases}$$

立天元一為股



【天元一 = 股 = 】x

自之得数加入勾巾為弦巾

【弦^2 = 】$x^2 + B^2$

以分母乗之得数加入股相乗分子得数共得数以減只云数相乗分母得数余為因分母円径

【2 径 = 】$2A - (2(x^2 + B^2) + 3x)$

自之為因分母巾円径巾寄左

【$(2\text{径})^2$ = 】$\left\{2A - (2(x^2 + B^2) + 3x)\right\}^2$ →左

列勾以股相乗亦以分母巾乗之得数倍之加入寄左為因分母巾因円径二個勾股和再寄

$4\text{積} + \text{径}^2 = (\text{勾} + \text{股}) \cdot 2\text{径} \cdots\cdots (\text{致近 } 81)$

【$2^2 \cdot \text{径} \cdot 2(\text{勾} + \text{股})$ = 】$2 \cdot 2^2 Bx + \{2A - (2(x^2 + B^2) + 3x)\}$ →再寄

列併勾股以因分母円径相乗亦以分母乗之得数倍之與再寄相消

【$2^2 \cdot 2\text{径}(\text{勾} + \text{股})$ = 】$2^2(B + x)\{2A - (2(x^2 + B^2) + 3x)\}$ →再寄と相消

1 鈎股弦適等集

$[i]$ 『鈎股弦適等集』(中西正好) 1684 貞享元年
$[ii]$ 『算法天元指南』(佐藤茂春) 1698 元禄 11 年
$[iii]$ 『勾股変化之法』[4](松永良弼) 1714 正徳 4 年
$[iv]$ 『勾股致近集』(若杉多十郎) 1719 享保 4 年
$[i]$ には 2400 余りの公式が集められている[5]．$[ii]$ では「矩合適等」と題して 125 の公式 (証明なし) が紹介されている．$[iii]$ は鈎股弦適等の作り方 (維乗術) が説明されている．$[iv]$ には証明を付けた 178 の公式がある．

2 『算法天元指南』矩合適等集

$[ii]$ の公式をすべて列記する．勾は直角を挟む短い方の辺，股は長い方の辺，積は三角形の面積，中勾は直角の頂点から斜辺に下ろした垂線，方は三角形に内接する正方形の 1 辺，径は内接円の直径を表す．

(1) $勾 \times 股 = 2\,積$

(2) $中勾 \times 弦 = 2\,積$

(3) $勾^2 + 股^2 = 弦^2$

(4) $(股 - 勾)^2 + 4\,積 = 弦^2$

(5) $(股 - 勾)^2 + 8\,積 = (勾 + 股)^2$

(6) $弦^2 + 4\,積 = (勾 + 股)^2$

(7) $(勾 + 股)^2 + (勾 - 股)^2 = 2\,弦^2$

(8) $(勾 + 股)(股 - 股) = 勾^2 - 股^2$

(9) $(股 + 弦)(弦 - 股) = 勾^2$

(10) $(勾 + 弦)(弦 - 勾) = 股^2$

(11) $勾^2 \times 股^2 = 4\,積^2$

(12) $中勾^2 \times 弦^2 = 4\,積^2$

(13) $(勾 + 弦)^2(弦 - 股)^2 = 勾^4$

(14) $(勾 + 弦)^2(弦 - 勾)^2 = 股^4$

(15) $長弦 \times 短弦 = 中勾^2$

(16) $短弦 \times 全弦 = 勾^2$

(17) $長弦 \times 全弦 = 股^2$

(18) $長弦^2 \times 短弦^2 = 中勾^4$

(19) $短弦^2 \times 全弦^2 = 勾^4$

(20) $長弦^2 \times 全弦^2 = 股^4$

(21) $(\text{中勾}+\text{弦})^2-(\text{勾}+\text{股})^2=\text{中勾}^2$

(22) $\text{股}^2-\text{勾}^2=(\text{長弦}-\text{短弦})\times\text{全弦}$

(23) $\text{長弦}^2-\text{短弦}^2=(\text{長弦}-\text{短弦})\times\text{全弦}=(\text{股}+\text{勾})(\text{股}-\text{勾})$

(24) $(\text{股}^2-\text{勾}^2)+(\text{勾}+\text{股})^2=(\text{勾}+\text{股})\times 2\,\text{股}$

(25) $(\text{勾}+\text{股})^2-(\text{股}^2-\text{勾}^2)^2=(\text{勾}+\text{股})\times 2\,\text{勾}$

(26) $\dfrac{1}{2}(\text{勾}+\text{股}+\text{弦})^2+2\,\text{積}=(\text{勾}+\text{股})(\text{勾}+\text{股}+\text{弦})$

(27) $2(\text{勾}+\text{弦})(\text{股}+\text{弦})=(\text{勾}+\text{股}+\text{弦})^2$

(28) $(\text{勾}+\text{中勾}+\text{短弦})^2+(\text{股}+\text{中勾}+\text{長弦})^2=(\text{勾}+\text{股}+\text{弦})^2$

(29) $(\text{中勾}+\text{短弦})^2+(\text{中勾}+\text{長弦})^2=(\text{勾}+\text{股})^2$

(30) $(\text{股}+\text{中勾})^2+(\text{勾}+\text{短弦})^2=(\text{勾}+\text{弦})^2$

(31) $(\text{勾}+\text{中勾})^2+(\text{股}+\text{長弦})^2=(\text{股}+\text{弦})^2$

(32) $(\text{股}^2+\text{弦}^2)-\text{勾}^2=\text{弦}\times 2\,\text{長弦}$

(33) $\text{勾}^2+\text{弦}^2-\text{股}^2=\text{弦}\times 2\,\text{短弦}$

(34) $\text{弦}^2-4\,\text{中勾}^2=(\text{長弦}-\text{短弦})^2$

(35) $\text{長弦}^2+\text{短弦}^2+2\,\text{中勾}^2=\text{弦}^2$

(36) $\text{勾}^2-\text{中勾}^2=\text{短弦}^2$

(37) $\text{股}^2-\text{中股}^2=\text{長弦}^2$

(38) $2\,\text{積}\times\text{勾}=\text{股}\times\text{勾}^2$

(39) $2\,\text{積}\times\text{股}=\text{勾}\times\text{股}^2$

(40) $\text{長弦}\times\text{勾}=\text{股}\times\text{中勾}$

(41) $\text{短弦}\times\text{股}=\text{勾}\times\text{中勾}$

(42) $2\,\text{弦}\,(\text{勾}+\text{股}+\text{弦}+\text{中勾})=(\text{勾}+\text{股}+\text{弦})^2$

(43) $2(\text{弦}-\text{股})(\text{勾}+\text{弦})=(\text{弦}-\text{股}+\text{勾})^2$

(44) $2(\text{弦}-\text{勾})(\text{勾}+\text{弦})=(\text{弦}-\text{勾}+\text{股})^2$

(45) $(\text{弦}-\text{勾})+(\text{弦}-\text{股})-(\text{股}-\text{勾})=2(\text{弦}-\text{股})$

(46) $2\,\text{弦}-\{(\text{弦}-\text{勾})+(\text{弦}-\text{股})\}=\text{勾}+\text{股}$

(47) $(\text{弦}-\text{勾})^2+(\text{弦}-\text{股})^2+\text{弦}^2=2\,\text{弦}\,\{(\text{弦}-\text{勾})+(\text{弦}-\text{股})\}$

(48) $(\text{弦}-\text{中勾})^2-(\text{股}-\text{勾})^2=\text{中勾}^2$

(49) $(\text{中勾}-\text{短弦})+(\text{長弦}-\text{中勾})=\text{長弦}-\text{短弦}$

(50) $(中勾-短弦)^2+(中勾-長弦)^2=(股-勾)^2$

(51) $(中勾-勾)^2+(長弦-股)^2=(弦-股)^2$

(52) $(短弦-勾)^2+(中勾-股)^2=(弦-勾)^2$

(53) $(股-勾)\,弦+(弦-股)\,勾=(弦-勾)\,股$

(54) $勾^2+(弦-股)^2=2\,弦\,(弦-股)$

(55) $股^2+(弦-勾)^2=2\,弦\,(弦-勾)$

(56) $勾^2-(弦-股)^2=2\,股\,(弦-股)$

(57) $股^2-(弦-勾)^2=2\,勾\,(弦-勾)$

(58) $(勾+弦)^2+股^2=2\,弦\,(勾+弦)$

(59) $(股+弦)^2-勾^2=2\,股\,(股+弦)$

(60) $(股+弦)^2+勾^2=2\,弦\,(股+弦)$

(61) $(勾+弦)^2-股^2=2\,勾\,(勾+弦)$

(62) $(勾+股+弦)^2-4\,積=2\,弦\,(勾+股+弦)$

(63) $(勾+股+弦)^2+4\,積=2(勾+股)(勾+股+弦)$

(64) $(勾+股+弦)^2-(4\,積+2\,弦^2)=2\,弦\,(勾+股)$

(65) $弦\times勾=短弦\times勾+中勾\times股$

(66) $弦\times股=長弦\times股+中勾\times勾$

(67) $(股+弦)\times勾=(中勾+勾)\times弦$

(68) $(勾+股)\times勾=(中勾+短弦)\times弦$

(69) $(勾+弦)\times股=(中勾+股)\times弦$

(70) $(勾+股)\times股=(中勾+長弦)\times弦$

(71) $(勾+弦)\times長弦=(中勾+股)\times股$

(72) $(股+弦)\times短弦=(中勾+勾)\times勾$

(73) $股^2-勾^2=弦\,\{(中勾-短弦)+(中勾-長弦)\}$

(74) $(弦-勾)^2+(弦-股)^2=弦\,[2\{(弦-勾)+(弦-股)\}-弦]$

(75) $(中勾-短弦)(中勾-長弦)=中勾\,\{(中勾-長弦)-(勾-短弦)\}$

(76) $2\,積=(勾+股)\times方$

(77) $(勾+股)^2\times方^2=4\,積^2$

(78) $欠勾\times欠股=方^2$

(79) $方 \times 勾 = 欠勾 \times 股$

(80) $方 \times 股 = 欠股 \times 勾$

(81) $2\,積 \times 欠股 = 方 \times 股^2$

(82) $2\,積 \times 欠勾 = 方 \times 勾^2$

(83) $(勾 + 股) \times 欠勾 = 勾^2$

(84) $(勾 + 股) \times 欠股 = 股^2$

(85) $(欠勾 + 欠股)(勾 + 股) = 弦^2$

(86) $(欠勾 + 欠股 + 方)^2 - 弦^2 = 方^2$

(87) $(欠股 - 方) \times 勾 = (股 - 勾) \times 方$

(88) $(欠勾 - 方) \times 股 = (股 - 勾) \times 方$

(89) $2(勾 + 股 + 弦 - 方)(勾 + 股) = (勾 + 股 + 弦)^2$

(90) $2(勾 + 股 + 弦 - 方) \times 弦 = (勾 + 股 + 弦 - 2\,方)(勾 + 股 + 弦)$

(91) $2\,中勾 \times 方 = (中勾 - 方)(勾 + 股 + 弦)$

(92) $4(積 - 方^2) \times 積 = 方^2 \times 弦^2$

(93) $\{4\,方^2 + (股 - 勾)^2\} \times 中勾^2 = 方^2 \times 弦^2$

(94) $(勾 + 股) \times 中勾 - 方 \times 弦 = (中勾 - 方)(勾 + 股 + 弦)$

(95) $4\,積 = 径\,(勾 + 股 + 弦)$

(96) $(勾 + 股 + 弦)^2 \times 径^2 = 16\,積^2$

(97) $勾 + 股 - 弦 = 径$

(98) $勾 + 股 + 弦 - 径 = 2\,弦$

(99) $勾 + 股 + 弦 + 径 = 2(勾 + 股)$

(100) $勾 - (弦 - 股) = 径$

(101) $股 - (弦 - 勾) = 径$

(102) $2(弦 - 勾)(弦 - 股) = 径^2$

(103) $(弦 - 勾) + (弦 - 股) + 径 = 弦$

(104) $(勾 + 弦) \times 股 - 股^2 = (勾 + 弦) \times 径$

(105) $(股 + 弦) \times 勾 - 勾^2 = (股 + 弦) \times 径$

(106) $(弦 + 中勾) - (勾 + 股) = 中勾 - 径$

(107) $(中勾 - 径)(勾 + 股 + 弦 + 中勾) = 中勾^2$

(108) 2 弦 $($中勾 $-$ 径$) =$ 径^2

(109) $($中勾 $-$ 径$)($勾 $+$ 股 $+$ 弦$) =$ 径 $\times$ 中勾

(110) $($勾 $+$ 股 $+$ 弦 $+$ 径$) \times$ 方 $= 4$ 積

(111) 弦 $($中勾 $-$ 方$) =$ 径 $\times$ 方

(112) $($径 $-$ 方$)($勾 $+$ 股 $+$ 弦$) =$ 径 $\times$ 方

(113) $($中勾 $-$ 径$) + ($径 $-$ 方$) =$ 中勾 $-$ 方

(114) $($径 $-$ 方$) \times$ 中勾 $= ($中勾 $-$ 径$) \times$ 方

(115) 弦 $($中勾 $-$ 径$) = ($方 $-$ 径$)($勾 $+$ 股$)$

(116) 弦 $\{($中勾 $-$ 径$) - ($径 $-$ 方$)\} =$ 径 $($径 $-$ 方$)$

(117) $($中勾 $-$ 方$)($勾 $+$ 股$) =$ 径 $\times$ 中勾

(118) $(2$ 方 $-$ 径$) \times$ 中勾 $=$ 径 $\times$ 方

(119) $(2$ 中勾 $-$ 径$) \times$ 方 $=$ 径 $\times$ 中勾

(120) 大径 $+$ 中径 $+$ 小径 $= 2$ 中勾

(121) 小径$^2 +$ 中径$^2 =$ 大径^2

(122) 大径 $\times$ 勾 $=$ 小径 $\times$ 弦

(123) 大径 $\times$ 股 $=$ 中径 $\times$ 弦

(124) 2 中勾 $\times$ 勾 $=$ 小径 $\times ($勾 $+$ 個 $+$ 弦$)$

(125) 2 中勾 $\times$ 股 $=$ 中径 $\times ($勾 $+$ 個 $+$ 弦$)$

A 以減 B 余為 C $\quad\rightarrow\quad B - A = C$

A 内減 B 余為 C $\quad\rightarrow\quad A - B = C$