和算における積分概念について

小寺　裕

長谷川弘閲，内田久命編『算法求積通考』(1844) より「畳数表」(定積分の値を表にしたもの) の作り方を説明する．

1　天表起原

天表とは

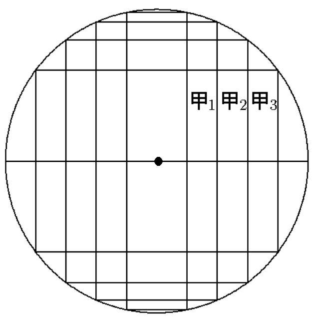
$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{p+1} \quad (p=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

の値を表にしたものである．和田寧の「畳元表」にあたる．このことを

$$「\left(\frac{k}{n}\right)^p \text{を天表により畳むと}\frac{1}{p+1}\text{になる}」$$

という言い方をする[1]．

2　甲表起原



直径 1 の円を $2n$ 等分し、直径に垂直な弦の長さを図のように 甲$_1$，甲$_2$，$\cdots$，$\dfrac{1}{n}=$ 子，$\dfrac{k}{n}=$ 天 とする．

$$甲_k = \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sqrt{1-天^2}$$

これを平方綴術により開き (Taylor 展開)

$$甲_k = 1-\frac{1}{2}天^2-\frac{1}{4\cdot 2}天^4-\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^6-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}天^8-\cdots-\frac{(2i-3)!!}{(2i)!!}天^{2i}-\cdots$$

ここで

[1] 天表の作り方は 小寺[2]

$$積_k = 子 \cdot 甲_k = \frac{1}{n}\left\{1 - \frac{1}{2}天^2 - \frac{1}{4\cdot 2}天^4 - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^6 - \cdots\right\}$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 積_k = 円の面積 = \frac{\pi}{4}$$

になることから，天表によりこれを畳むと

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{5\cdot 4\cdot 2} - \frac{3\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \cdots \qquad ①$$

和算家はこの級数を円積率と名付けている．

2.1 前空数と後空数

$\sqrt{1-x}$ を平方綴術により無限級数に展開し、$x=1$ とおくと

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \cdots = 0 \qquad ②$$

故に

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \cdots - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot 2} + \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} + \cdots = 0$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\frac{1}{4\cdot 2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2}\right) + \cdots = 0$$

すなわち

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4\cdot 2} + \frac{3}{6\cdot 4\cdot 2} + \frac{3\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} + \frac{5\cdot 3\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} + \cdots = 0 \qquad ③$$

「求積通考」では，②を前空数，③を後空数と呼んでいる．

2.2 奇乗甲表

奇乗甲表とは和田寧の「龍商陰表」にあたるもので．定積分

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{2p+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2q+1} dx$$

の値を表にしたものである．$B(0,\ 0)$ の計算を示す．

$$天甲_k = 天\sqrt{1-天^2} = 天 - \frac{1}{2}天^3 - \frac{1}{4\cdot 2}天^5 - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^7 - \cdots$$

天表によりこれを畳むと

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2} - \frac{3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \cdots \qquad ④$$

③ より

$$\frac{1}{4\cdot 2} + \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2} + \frac{3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} + \cdots = \frac{1}{6}$$

だから

$$B(0,\ 0) = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

この $\dfrac{1}{3}$ が奇乗甲表の初級初行欄に書かれているものである．また，この計算は現代の不定積分

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

を利用したのと同じことである．

3　天商表起原

差 $= 1 -$ 天 とおく.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\text{天}} &= \sqrt{1-\text{差}} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\text{差} - \frac{1}{4\cdot 2}\text{差}^2 - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\text{差}^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\text{差}^4 - \cdots - \frac{(2i-3)!!}{(2i)!!}\text{差}^i - \cdots
\end{aligned}
$$

これを天表により畳むと

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x}dx &= 1 - \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 2} - \frac{3\cdot 1}{4\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{5\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 1} - \cdots \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2} - \frac{3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \cdots\right) \\
&= 2\times\frac{1}{3} \quad (\text{④より}) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

これは

$$
\int_0^1 \sqrt{x}dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx
$$

を利用したのと同じことである.

4　まとめ

和算では級数展開した係数を眺めてこのようなアイデアに至ったと思われるが，積分区間が 0 から 1 であるため不定積分の係数だけを書き並べたことと同じ結果になる．特に「前空数」「後空数」など 0 の級数展開を巧みに使っている．しかし，$\int_0^1 \sqrt{x}dx$ を求めるのに奇乗甲表を使っていることから見てもわかるように，微分法の逆演算としての積分法ではない．区分求積法や級数展開を巧みに利用した円理と呼ばれる和算独自の方法である.

参考文献

[1] 小寺　裕：和算における穿去問題　東大寺学園中・高等学校研究紀要第 7 号　1996

[2] 小寺　裕：今昔微分積分花紅彩色画　『和算』第 78 号　近畿数学史学会編　1995

[3] 小寺　裕：『算法求積通考』における「甲表起源」について　数学教育学会冬季研究会発表論文集 2001

[4] 加藤平左ェ門：和算の研究 行列式及圓理　東京開成館　1944

[5] 加藤平左ェ門：和田寧の業績　名城大学理工学部数学教室　1967

[6] 長谷川弘閲，内田久命編：算法求積通考　1844　小寺　裕蔵